Занятие 3

Сигнатура $\sigma = \langle Pr, Cnst\rangle$ — это фиксированный набор предикатных символов и констант. Ограничиваем язык ЛП выбранной сигнатурой. Получается конкретный язык предикатов первого порядка. Фиксируем интерпретацию I сигрнатуры в некоторой математической структуре (модели языка). Получаем язык для описания свойств этой структуры.

1. Сигнатура содержит двухместные $=^2$, $\in^2$, $\perp^2$. Констант нет. Носитель интерпретации M — все точки и прямые на плоскости. Предикатные символы интерпретируются равенством, принадлежностью (точка лежит на прямой) и перпендикулярностью (прямых). Выразить:

   (a) "x — точка", "x — прямая".

   (b) "Прямые x и y параллельны".

   (c) "x, y, z — вершины (невырожденного) треугольника".

   (d) "Высоты каждого треугольника пересекаются в одной точке".

   (e) "Точки x, y, z , t являются последовательными вершинами параллелограмма".

   (f) "Точка z делит отрезок x, y пополам".

2. Язык арифметики. На множестве натуральных чисел заданы трехместные предикаты $S(x, y, z) =$ и $\iff x+y = z$, $P(x, y, z) =$ и $\iff x \cdot y = z$. На языке первого порядка с предикатными символами S, P записать:

   (a) формулы с одной свободной переменной a, истинные тогда и только тогда, когда $a = 0$, $a = 1$, $a = 2$, a — чётное число, a — нечётное число;

   (b) формулы с двумя свободными переменными a и b, истинные тогда и только тогда, когда $a = b$, $a \leq b$, a делит b;

   (c) формулы с тремя свободными переменными a, b и c, истинные тогда и только тогда, когда a — наименьшее общее кратное чисел b и c, a — наибольший общий делитель чисел b и c.

На лекции: в стандартной интерпретации (см. задачу 2) языка арифметики выразим график β-функции Геделя. Эта такая функция, что для каждой конечной последовательности натуральных чисел $a_1, \ldots, a_n$ существуют x, y такие, что

$$\beta(x,y,0) = n, \quad \beta(x,y,1) = a_1, \quad \ldots \quad , \beta(x,y,n) = a_n.$$

3. Доказать выразимость в стандартной интерпретации языка арифметики условия “ $y = 2^x$ ”.

Техника доказательства невыразимости: если отношение не сохраняется при некотором автоморфизме модели, то оно невыразимо. (Автоморфизм — это биекция носителя на себя, сохраняющая все сигнатурные отношения и константы.) Выразимы ли следующие отношения?

4. $a = b$, $b = a + 1$, $c = a + b$ в $(\mathbf{Z}, <)$.
5. $a = 0$, $a = b$, $a < b$ в $(\mathbf{Z}, a + b = c)$.
6. $a = b$, $a = 1$, $a = 3$ в $(\mathbf{N}, a \vdots b)$ где $a \vdots b \Leftrightarrow \exists k (a = k \cdot b)$, т.е. $0 \vdots 0$.

Домашнее задание

7. Доделать задачи 1 и 2.
8. Пусть график функции $f : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ выразим в стандартной интерпретации языка арифметики. Доказать выразимость графика функции g, определенной рекурсией: $g(0) = a, \quad g(n{+}1) = f(n, g(n))$.
9. Выразимы ли следующие отношения?
   (a) $a = b$, $|a - b| = 2$ в $(\mathbf{R}, |a - b| = 1)$.
   (b) $a < b$, $a = 0$, $a = 1$, $a = 2$ в $(\mathbf{N}, a + b = c)$.
   (c) “a — простое число” в $(\mathbf{N}, a \vdots b)$.
   (d) $a = 1$, $a = 2$ в $(\mathbf{Z}, a + b = c)$.
   (e) $a = 0$ в $(\mathbf{Z}, a = b + 1)$.
   (f) $a = b + 1$ в $(\mathbf{Z}, a = b + 2)$.
   (g) $a = b + 1$ в $(\mathbf{Z}, |a - b| = 1)$.
   (h) $|a - b| = 3$ в $(\mathbf{R}, |a - b| = 1)$.