Занятие 2

($\Sigma_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ — формальное выражение или число? А $\Sigma_{n=1}^{\infty} 1/n$?)

Формальный язык состоит из формальных выражений (слов), называемых *формулами*. А описание допустимых способов приписывать им значения называется *семантикой* языка.

Два формальных языка — языки ЛВ (логики высказываний) и ЛП (логики предикатов [или отношений], чистой логики предикатов).

Язык ЛВ. $PVar = \{p_0, p_1, \ldots\}$ (пропозициональные переменные);
Формулы. $F ::= p_i \mid (\neg F) \mid (F \wedge F) \mid (F \vee F) \mid (F \to F) \mid (F \leftrightarrow F)$.
(Соглашения о приоритете связок позволяют опускать часть скобок.)
Семантика. Функция $\alpha : Var \to Prop$ называетсся интерпретацией, или оценкой проп. переменных. Для классической логики: $Prop = \{0, 1\}$, функция α — истинностная оценка, она продолжается на все формулы по таблицам истинности. (Возможны и более "богатые" оценки с другим $Prop$, но они неотличимы от простейших ввиду бедности языка.)

Язык ЛП. $Var = \{x_0, x_1, \ldots\}$ (предметные, или индивидные переменные); $Cnst = \{c_0, c_1, \ldots\}$ (предметные, или индивидные константы); $Tm = Var \cup Cnst$ (термы — обозначения для переменных и постоянных объектов, "предметов").

Для каждого $n = 0, 1, \ldots$ счетный набор предикатных символов $\{P_0^n, P_1^n, \ldots\}$ (для обозначения всевозможных n-местных отношений). *Атомарные* формулы: $P_i^n(t_1, \ldots, t_n)$, где $t_j \in Tm$ (выражают условие $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in R$ когда P_i^n обозначает n-местное отношение R).

Формулы строятся из атомарных с помощью связок $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$ (как в случае ЛВ из проп. переменных) и с помощью кванторов: $(\forall x_i\, \varphi)$ и $(\exists x_i\, \varphi)$. Появляется деление на свободные и связанные вхождения переменных — кванторы связывают x_i внутри $(\forall x_i \ldots)$ и $(\exists x_i \ldots)$.
Семантика. Выбираем множество $M \neq \emptyset$ (носитель) и интерпретацию I языка ЛП в M:

$$I : c_i \;\mapsto\; \overline{c_i} \in M, \qquad I : P_i^n \;\mapsto\; \overline{P_i^n} \subseteq M^n.$$

Тогда каждая *замкнутая* (т.е. без свободных переменных) формула становится обозначением для некоторого высказывания про конкретные (заданные интерпретацией) отношения на множестве M. Оно оказывается истинным или ложным. Тем самым определяется истинность/ложность формулы в данной интерпретации (обозначение: $I \models \varphi$).

Пример. $\varphi = \forall x_0 \exists x_1 (P^2_3(x_0, x_1) \wedge P^1_0(x_1))$ (удобнее $\forall x \exists y (P(x, y) \wedge Q(y))$).

> $M := N$, $\overline{P} := \{\langle x, y\rangle \mid x < y\}$, $\overline{Q} := \{x \mid x$ простое число$\}$. Тогда φ выражает факт бесконечности множества простых чисел, поэтому $I \models \varphi$.
>
> Изменим интерпретацию $\overline{P} := \{\langle x, y\rangle \mid x > y\}$. Тогда φ выражает ложное высказывание об отсутствии наименьшего простого числа, поэтому $I \not\models \varphi$.

Истинность/ложность незамкнутых формул $\varphi(\bar{x})$ в интерпретации I зависит от выбора значений свободных переменных $\bar{x}$. Чтобы фиксировать этот выбор, к интерпретации добавляют оценку свободных переменных $\theta : Var \to M$. Тогда $I, \theta \models \varphi(\bar{x}) \Leftrightarrow I \models \varphi(\theta(\bar{x}))$. (Все корректно? Подумать, как исправить.)

I. Выполнимость и общезначимость формул (для ЛВ и ЛП).

1. Исследовать на выполнимость и общезначимость:

$$
\begin{array}{ll}
\neg p \wedge p & \exists x\, P(x, x) \\
(p \to q) \vee (q \to p) & \forall x (P(x) \vee Q(x)) \to \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \\
(p \to q) \to p & \forall x (P(x) \vee Q(x)) \to \forall x P(x) \vee \exists x Q(x) \\
p \to (q \to p) & \exists x \forall y \exists z P(x, y, z) \to \forall x \exists y P(x, y, y) \\
((p \to q) \to p) \to p & \exists y \forall x P(x, y, y) \to \forall x \exists y \forall z P(x, y, z)
\end{array}
$$

II. Эквивалентность формул в языках ЛВ и ЛП. Основные эквивалентности:

- $\wedge$, $\vee$ — ассоциативны, симметричны, идемпотентны ($A \vee A \equiv A$) и дистрибутивны относительно друг друга.
- $A \to B \equiv \neg A \vee B$, $\quad A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$.
- $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$, $\quad \neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$.
- $A \wedge (A \vee B) \equiv A$, $\quad A \vee (A \wedge B) \equiv A$.
- $A \vee \neg A \equiv \top$, $\quad A \wedge \neg B \equiv \bot$,

- Вынесение кванторов:

$$Qx\, A(x)\, op\, B \equiv Qx(\, A(x)\, op\, B\,), \qquad Q \in \{\forall, \exists\},\ op \in \{\wedge, \vee\}.$$

$$\neg\exists x A(x) \equiv \forall x \neg A(x), \qquad \neg\forall x A(x) \equiv \exists x \neg A(x).$$

- Переименование кванторов:
  $Qx\, A(x) \equiv Qy\, A(y)$ (y — новая переменная).

- Сокращение кванторов:

  $$\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x (A(x) \wedge B(x)), \quad \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \equiv \exists x (A(x) \vee B(x)).$$

- Фиктивный квантор: $\forall x A \equiv A, \quad \exists x A \equiv A$.

2. Упростить: $((p \to q) \wedge (\neg q \to p)) \vee (r \to p)$.

3. В каждом из четырех примеров вынести кванторы наружу:
   $Q_1 x\, A(x) \to Q_2 x\, B(x)$, где $Q_1, Q_2 \in \{\forall, \exists\}$.

4. Сформулировать общий метод вынесения кванторов.

5. Добавление. В реальной математике мы часто выходим за рамки языка ЛП (1-го порядка) в языки 2-го и больших порядков. Пример — перевод $I \models \forall \bar{x} \exists y Q(\bar{x}, y)$ в язык второго порядка с кванторами по функциям: $I \models \exists f \forall \bar{x} Q(\bar{x}, f(\bar{x}))$ (введение скулемовских функций). Пусть надо доказать, что

   $$\lim_{x \to +\infty} 1/x = 0, \quad \text{т.е.} \quad \mathbf{R}^+ \models \forall \varepsilon \exists a \underbrace{\forall x (x > a \to (1/x) < \varepsilon)}_{Q(\varepsilon, a)}.$$

   Вместо этого обычно ищут такую функцию $f(\varepsilon)$, для которой верно $\forall x (x > f(\varepsilon) \to (1/x) < \varepsilon)$, например, $f(\varepsilon) = 1/\varepsilon$, т.е. доказывают

   $$\mathbf{R}^+ \models \exists f \forall \varepsilon \forall x (x > f(\varepsilon) \to (1/x) < \varepsilon).$$

   Это вполне корректный и работоспособный метод доказательства истинности формул ЛП в данной интерпретации.

Домашнее задание

6. Доделать задачу 1.

7. Можно ли подобрать формулу A языка ЛВ так, чтобы следующая формула была тождественно истинной:
   $(A \wedge q \to \neg p) \to ((p \to \neg q) \to A)$.
   Если можно, то сколько неэквивалентных решений имеет задача?

8. Доказать, что следующая формула выполнима только в бесконечных интерпретациях:
   $\forall x \exists y Q(x,y) \wedge \forall x \forall y \forall z (\neg Q(x,x) \wedge (Q(x,y) \to (Q(y,z) \to Q(x,z))))$.

9. Доказать, что следующая формула истинна в каждой интерпретации с трехэлементным носителем:
   $\forall x \forall y \forall z (R(x,x) \wedge (R(x,y) \to R(x,y) \vee R(y,z))) \to \exists x \forall y R(x,y)$.

10. Уметь доказывать основные эквивалентности. Почему формул вынесения кванторов 4, а сокращения кванторов — только 2 ?

11. Вынести кванторы наружу (привести к предваренной нормальной форме):
    $$\neg \forall x \forall y P(x,y) \vee \forall x \exists y Q(x,y).$$
    $$\forall x \neg \exists y P(x,y) \wedge \exists x \forall y Q(x,y),$$
    $$\forall x \exists y P(x,y) \to \forall x \exists y Q(x,y).$$

12. С помощью введения скулемовских функций $z(x)$ и $u(x,y)$ установить истинность следующей формулы в стандартной интерпретации на натуральном ряду. (Символы “$<$”, “$>$” интерпретируются отношениями “меньше” и “больше”.)
    $$\forall x \exists z \forall y \exists u ((y > z \to y > u) \wedge (u < z) \wedge \neg (u < x)).$$
    Почему у скулемовских функций именно такие аргументы?