

## Интуиционистское исчисление высказываний

Язык интуиционистской логики высказываний такой же, как и у классической: формулы строятся из множества переменных  $\text{Var} = \{p, q, r, \dots\}$  с помощью логических связок  $\vee$  (“или”),  $\wedge$  (“и”),  $\rightarrow$  (импликация),  $\neg$  (отрицание)

**Аксиомы интуиционистского исчисления высказываний:**

1.  $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2.  $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
3.  $(A \wedge B) \rightarrow A; (A \wedge B) \rightarrow B$
4.  $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$
5.  $A \rightarrow (A \vee B); B \rightarrow (A \vee B)$
6.  $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$
7.  $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$
8.  $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$

Правило вывода (modus ponens): из посылок  $A$  и  $A \rightarrow B$  выводится заключение  $B$ .

Если формула  $A$  выводится в этом исчислении из множества посылок (гипотез)  $\Gamma$ , пишем  $\Gamma \vdash A$ .

**Моделью Крипке** называется тройка  $\mathcal{M} = (W, \preceq, v)$ , где:

- $W$  — непустое множество “возможных миров”;
- $\preceq$  — отношение частичного порядка (рефлексивное и транзитивное отношение) на  $W$ ;
- $v: W \times \text{Var} \rightarrow \{0, 1\}$  — оценка переменных. Предполагается, что функция  $v$  монотонна, т.е. если  $v(x, p) = 1$  и  $x \preceq y$ , то  $v(y, p) = 1$ .

**Истинность формулы  $A$**  в данном мире  $x$  модели Крипке  $\mathcal{M}$  (обозначение:  $\mathcal{M}, x \vDash A$ ) определяется индуктивно:

- $\mathcal{M}, x \vDash p \iff v(x, p) = 1$ ;
- $\mathcal{M}, x \vDash (A \vee B) \iff (\mathcal{M}, x \vDash A \text{ или } \mathcal{M}, x \vDash B)$ ;
- $\mathcal{M}, x \vDash (A \wedge B) \iff (\mathcal{M}, x \vDash A \text{ и } \mathcal{M}, x \vDash B)$ ;
- $\mathcal{M}, x \vDash (A \rightarrow B) \iff$  для всех  $y \succeq x$  (если  $\mathcal{M}, y \vDash A$ , то  $\mathcal{M}, y \vDash B$ );
- $\mathcal{M}, x \vDash \neg A \iff$  для всех  $y \succeq x$  ( $\mathcal{M}, y \not\vDash A$ ).

**Теорема о корректности.** Всякая формула, доказуемая в интуиционистском исчислении высказываний, истинна во всех мирах всех моделей Крипке.

**Теорема о полноте.** Всякая формула, истинная во всех мирах всех моделей Крипке, доказуема в интуиционистском исчислении высказываний.

**Теорема о полноте относительно конечных моделей.** Всякая формула, истинная во всех мирах всех конечных моделей Крипке (т.е. моделей с конечным множеством возможных миров  $W$ ), доказуема в интуиционистском исчислении высказываний.

1. Докажите, что истинность произвольных формул в модели Крипке монотонна: если  $\mathcal{M}, x \vDash A$  и  $y \succeq x$ , то  $\mathcal{M}, y \vDash A$ . (Подсказка: воспользуйтесь индукцией по структуре формулы  $A$ .)

2. *Теорема о дедукции.* Докажите, что если  $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ , то  $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ . (Подсказка: воспользуйтесь индукцией по длине вывода.)

3. Какие из следующих формул доказуемы в интуиционистском исчислении высказываний, а какие — нет?

- а)  $p \rightarrow \neg\neg p$ ; б)  $\neg\neg p \rightarrow p$ ; в)  $\neg\neg\neg p \rightarrow \neg p$ ; г)  $\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ ; д)  $\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ ; е)  $p \vee \neg p$ ;

**ж)**  $\neg\neg(p \vee \neg p)$ ; **з)**  $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ ; **и)**  $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$ ; **к)**  $(p \rightarrow q) \rightarrow ((r \rightarrow p) \rightarrow (r \rightarrow q))$ ; **л)**  $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$ ; **м)**  $p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$ ; **н)**  $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ ; **о)**  $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \vee q)$ ; **п)**  $((((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow q$ .

4. *Дизъюнктивное свойство.* Докажите, что если формула  $A \vee B$  доказуема в интуиционистском исчислении высказываний, то в нём же доказуема или формула  $A$ , или формула  $B$  (или, возможно, обе). Обладает ли этим свойством классическая логика?

5. *Теорема Гливенко.* Докажите, что  $A$  является классической тавтологией тогда и только тогда, когда  $\neg\neg A$  доказуема в интуиционистском исчислении высказываний.

6. Существует ли формула, истинная во всех моделях Крипке, для которых  $\preceq$  есть линейный порядок, но не доказуемая в интуиционистском исчислении высказываний?

7. Придумайте формулу от одной переменной  $p$ , опровергаемую на некоторой модели глубины 2, но истинной на всех моделях глубины 1. Тот же вопрос для глубины 3 (соответственно, 2). (Глубиной модели считается максимальная длина цепочки вида  $x_1 \preceq x_2 \preceq \dots \preceq x_n$ , где все  $x_i$  различны.)

8. Назовём множество формул  $\Gamma$  *дизъюнктивным*, если (1)  $\Gamma$  непротиворечиво (т.е. не существует такой формулы  $A$ , что  $\Gamma \vdash A$  и  $\Gamma \vdash \neg A$ ); (2) если  $\Gamma \vdash (A \vee B)$ , то  $A \in \Gamma$  или  $B \in \Gamma$ .

а) Докажите, что если  $\Gamma \vdash A$  и  $\Gamma$  дизъюнктивно, то  $A \in \Gamma$ .

б) Докажите, что для всякого непротиворечивого множества формул  $\Gamma_0$  существует дизъюнктивное множество формул  $\Gamma$ , содержащее  $\Gamma_0$ .

в) Пусть  $W_0$  — множество всех дизъюнктивных множеств формул. Определим на нём частичный порядок  $\preceq_0$  следующим образом:  $\Gamma_1 \preceq_0 \Gamma_2$ , если  $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ . Для каждой  $p \in \text{Var}$  положим  $v_0(\Gamma, p) = 1 \iff p \in \Gamma$ . Докажите, что  $\mathcal{M}_0 = (W_0, \preceq_0, v_0)$  является моделью Крипке, причём  $\mathcal{M}_0, \Gamma \vDash A \iff A \in \Gamma$ .

г) Выведите отсюда теорему о полноте (см. выше).

9\*. Докажите теорему о полноте относительно конечных моделей.