

Графы и монадическая логика второго порядка

15 декабря 2021

Определение 1. Граф — структура (V, E) , где E — множество, все элементы которого имеют вид $\{v_1, v_2\}$ ($v_i \in V$). Вместо $\{v_1, v_2\} \in E$ пишем $\text{adj}(v_1, v_2)$. Альтернативно, если $e \in E$, то вместо $v \in e$ пишем $\text{inc}(v, e)$.

Как видно из определений, все графы являются неориентированными.

Напомним, что в логике первого порядка есть следующие логические символы: $\forall x, \exists x, \vee, \wedge, \neg$. В монадической логике второго порядка добавляются кванторы по множествам объектов. Переменные разбиты на четыре класса: переменные для вершин (обозначаем u, v, w, x, y, z); переменные для ребер (обозначаем e, f, g, h); переменные для множеств вершин (обозначаем U, V, W, X, Y, Z); переменные для множеств ребер (обозначаем E, F, G, H). Также в сигнатуру добавляется предикат равенства, для логики второго порядка — предикат принадлежности, а также один из предикатов inc или adj .

	1	2
FO	$\forall \exists v$ $\text{adj}, =$	$\forall \exists v, \forall \exists e$ $\text{inc}, =$
MSO	$\forall \exists v, \forall \exists V$ $\text{adj}, =, \in$	$\forall \exists v, \forall \exists e, \forall \exists V, \forall \exists E$ $\text{inc}, =, \in$

Пример. Формула $\forall u \exists v \text{adj}(u, v)$ говорит, что в графе нет изолированных вершин. То же говорит и $\forall u \exists e \text{inc}(u, e)$. Первая формула принадлежит FO_1 , вторая — FO_2 .

Пример. Формула $\forall u \forall v \forall w \forall x (\text{adj}(u, v) \wedge \text{adj}(u, w) \wedge \text{adj}(u, x)) \rightarrow ((v = w) \vee (v = x) \vee (w = x))$ говорит, что в графе нет вершин степени более 2.

Пример. Формула $\exists U \exists V (\exists u (u \in U)) \wedge (\exists v (v \in V)) \wedge (\forall u \forall v (u \in U \wedge v \in V \rightarrow \neg \text{adj}(u, v)))$ говорит, что в графе можно выделить два непустых множества вершин U и V , таких, что вершины из U не соединены с вершинами из V . Эта формула из MSO_1 .

Ключевой инструмент для доказательства, что семейство графов не задается формулой логики 1-го или 2-го порядка — игра Эренфойхта с n ходами:

Игроки: Новатор (Н) и Консерватор (К).

Поле для игры: граф G_1 и граф G_2 .

Ход k : Н выбирает любой из двух графов G_i (то есть выбирает $i \in \{1, 2\}$) и в нем любую вершину a_k^i . В ответ К должен выбрать во втором графе G_j вершину a_k^j .

Условия выигрыша: К выигрывает, если в конце игры любые две из выбранных вершин a_k^1 и a_l^1 (а) совпадают, (б) смежны тогда и только тогда, когда тем же свойством обладают вершины a_k^2 и a_l^2 . Неформально говоря, К смог успешно построить два изоморфных подграфа за эту игру. Иначе выигрывает Н (он завел Консерватора в тупик, и последнему в какой-то момент пришлось ошибиться и сделать неправильный выбор).

Выигрышная стратегия игрока А: неформально говоря, это способ игрока А так делать ходы, чтобы вне зависимости от ответных действий второго игрока А выиграл (если вы очень любите формальные определения, вы можете (а) найти их в Интернете, (б) вывести их сами, продумав, как формализовать понятие игры, хода, выигрыша и наконец поняв, что такое выигрышная стратегия).

Теорема 1. Если у К есть выигрышная стратегия в игре с n ходами, то $G_1 \equiv_n G_2$.

Доказательство. Пусть заключение неверно, и существует формула φ кванторной глубины $m \leq n$, различающая G_1 и G_2 ($G_1 \models \varphi$, $G_2 \models \neg \varphi$). Воспользуемся логическими эквивалентностями в отношении отрицания ($\neg \forall x \psi \equiv \exists x \neg \psi$ и так далее) и сделаем так, чтобы отрицания применялись только к атомарным формулам. Обозначим новую формулу за φ' . Как из нее извлечь стратегию игры для Новатора?

Если $\varphi' = \exists x \varphi_1(x)$, то Н выбирает в G_1 в качестве a_1^1 тот самый элемент, для которого верна $\varphi_1(a_1^1)$. Заметим, что в G_2 верно $\neg \varphi_1(a_1^2)$ для любого ответа К.

Если $\varphi' = \forall x \varphi_1(x)$, то $\neg \varphi'$ в приведенном виде тоже начинается с квантора существования, и Н выбирает в G_2 в качестве a_1^2 тот самый элемент, для которого верна $\neg \varphi_1(a_1^2)$.

И так мы продолжаем: если на k -м ходу у нас построена формула $\varphi_k(x_1, \dots, x_k)$ такая, что в G_1 верно $\varphi_k(a_1^1, \dots, a_k^1)$, а в G_2 верно $\neg\varphi_k(a_1^2, \dots, a_k^2)$, то мы разбираем случаи в зависимости от внешней логической связки в этой формуле. При этом формула постепенно упрощается.

К концу m ходов формула $\varphi_m(a_1^1, \dots, a_m^1)$ упростится до атомарной, и окажется, что К проиграл — и это не зависело от его ходов. Приходим к противоречию с тем, что у К есть выигрышная стратегия. \square

Теорема 2. Семейство графов \mathcal{G} нельзя задать формулой FO_1 , если для любого n существует $G_1 \in \mathcal{G}$ и $G_2 \notin \mathcal{G}$, для которых у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре с n ходами.

1. Задайте формулой MSO_1 следующие семейства простых графов:

- (a) двудольные графы.
- (b) связные графы;
- (c) циклы.

2. Как обобщить игры Эренфойхта на MSO_1 и MSO_2 ?

3. Задайте формулой MSO_1 или MSO_2 следующие семейства простых графов; если не получается задать формулой MSO_1 , докажите, что это невозможно (иногда это может быть непросто). Как следствие, убедитесь, что MSO_2 позволяет задавать строго больше семейств графов, чем MSO_1 .

- (a) цепи;
- (b) эйлеровы графы (содержащие цикл, проходящий по каждому ребру ровно 1 раз);
- (c) деревья (связные графы без циклов);
- (d) планарные графы (подсказка — нужна теорема Куратовского; вероятно, лучше вернуться к этому заданию после пункта 4);
- (e) сбалансированные двудольные графы (с равномошными долями);
- (f) гамильтоновы графы (содержащие цикл, проходящий через каждую вершину ровно 1 раз);
- (g) графы прямоугольных решеток $k \times n$ для всевозможных k и n .
- (h) графы квадратных решеток $n \times n$ для всевозможных n .

4. *Минор графа* G — граф H , получающийся из G применением нуля или более следующих операций: (1) стягивание ребра (удаление ребра и отождествление инцидентных ему вершин), (2) удаление ребра, (3) удаление изолированной вершины. Обозначение: $H \preceq G$.

- (a) Докажите, что для данного графа H множество $\{G : H \preceq G\}$ определимо в MSO_2 .
- (b) Докажите, что если множество графов *Minors* определимо в MSO_2 , то и $\{G : \exists H \in \text{Minors } H \preceq G\}$ определимо в MSO_2 .
- (c) Докажите, что если множество графов *Minors* определимо в MSO_2 , то и $\{G : \forall H \in \text{Minors } H \not\preceq G\}$ определимо в MSO_2 .