Графы и монадическая логика второго порядка

1 декабря 2021

Определение 1. Граф — структура (V, E), где E — множество, все элементы которого имеют вид $\{v_1, v_2\}$ $(v_i \in V)$. Вместо $\{v_1, v_2\} \in E$ пишем $\mathrm{adj}(v_1, v_2)$. Альтернативно, если $e \in E$, то вместо $v \in e$ пишем $\mathrm{inc}(v, e)$.

Как видно из определений, все графы являются неориентированными.

Напомним, что в логике первого порядка есть следующие логические символы: $\forall x$, $\exists x$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$. В монадической логике второго порядка добавляются кванторы по множествам объектов. Переменные разбиты на четыре класса: переменные для вершин (обозначаем u, v, w, x, y, z); переменные для ребер (обозначаем e, f, g, h); переменные для множеств вершин (обозначаем U, V, W, X, Y, Z); переменные для множеств ребер (обозначаем E, F, G, H). Также в сигнатуру добавляется предикат равенства, для логики второго порядка — предикат принадлежности, а также один из предикатов inc или adj.

	1	2
FO	$\forall\exists v$ adj, $=$	$\forall\exists v$, $\forall\exists e$ inc, $=$
MSO	$\forall\exists v$, $\forall\exists V$ adj, $=$, $\in$	$\forall\exists v$, $\forall\exists e$, $\forall\exists V$, $\forall\exists E$ inc, $=$, $\in$

Пример. Формула $\forall u \exists v\ \mathrm{adj}(u, v)$ говорит, что в графе нет изолированных вершин. То же говорит и $\forall u \exists e\ \mathrm{inc}(u, e)$. Первая формула принадлежит FO_1, вторая — FO_2.

Пример. Формула $\forall u \forall v \forall w \forall x (\mathrm{adj}(u, v) \wedge \mathrm{adj}(u, w) \wedge \mathrm{adj}(u, x)) \to ((v = w) \vee (v = x) \vee (w = x))$ говорит, что в графе нет вершин степени более 2.

Пример. Формула $\exists U \exists V (\exists u(u \in U)) \wedge (\exists v(v \in V)) \wedge (\forall u \forall v(u \in U \wedge v \in V \to \neg\,\mathrm{adj}(u, v)))$ говорит, что в графе можно выделить два непустых множества вершин U и V, таких, что вершины из U не соединены с вершинами из V. Эта формула из MSO_1.

Ключевой инструмент для доказательства, что семейство графов не задается формулой логики 1-го или 2-го порядка — игра Эренфойхта с n ходами:

Игроки: Новатор (Н) и Консерватор (К).

Поле для игры: граф G_1 и граф G_2.

Ход k: Н выбирает любой из двух графов G_i (то есть выбирает $i \in \{1, 2\}$) и в нем любую вершину a_k^i. В ответ К должен выбрать во втором графе G_j вершину a_k^j.

Условия выигрыша: К выигрывает, если в конце игры любые две из выбранных вершин a_k^1 и a_l^1 (а) совпадают, (б) смежны тогда и только тогда, когда тем же свойством обладают вершины a_k^2 и a_l^2. Неформально говоря, К смог успешно построить два изоморфных подграфа за эту игры. Иначе выигрывает Н (он завел Консерватора в тупик, и последнему где-то пришлось ошибиться и сделать неправильный выбор).

Теорема 1. *Если у К есть выигрышная стратегия в игре с n ходами, то $G_1 \equiv_n G_2$.*

Доказательство. Пусть заключение неверно, и существует формула φ кванторной глубины $m \le n$, различающая G_1 и G_2 ($G_1 \models \varphi$, $G_2 \models \neg\varphi$). Воспользуемся логическими эквивалентностями в отношении отрицания ($\neg\forall x \psi \equiv \exists x \neg\psi$ и так далее) и сделаем так, чтобы отрицания применялись только к атомарным формулам. Обозначим новую формулу за φ'. Как из нее извлечь стратегию игры для Новатора?

Если $\varphi' = \exists x \varphi_1(x)$, то Н выбирает в G_1 в качестве a_1^1 тот самый элемент, для которого верна $\varphi_1(a_1^1)$. Заметим, что в G_2 верно $\neg\varphi_1(a_1^2)$ для любого ответа К.

Если $\varphi' = \forall x \varphi_1(x)$, то $\neg\varphi'$ в приведенном виде тоже начинается с квантора существования, и Н выбирает в G_2 в качестве a_1^2 тот самый элемент, для которого верна $\neg\varphi_1(a_1^2)$.

И так мы продолжаем: если на k-м ходу у нас построена формула $\varphi_k(x_1, \ldots, x_k)$ такая, что в G_1 верно $\varphi_k(a_1^1, \ldots, a_k^1)$, а в G_2 верно $\neg\varphi_k(a_1^2, \ldots, a_k^2)$, то мы разбираем случаи в зависимости от внешней логической связки в этой формуле. При этом формула постепенно упрощается.

К концу m ходов формула $\varphi_m(a_1^1, \ldots, a_m^1)$ упростится до атомарной, и окажется, что К проиграл — и это не зависело от его ходов. Приходим к противоречию с тем, что у К есть выигрышная стратегия. □

Теорема 2. *Семейство графов $\mathcal{G}$ нельзя задать формулой* FO_1, *если для любого n существует $G_1 \in \mathcal{G}$ и $G_2 \notin \mathcal{G}$, для которых у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре с n ходами.*

Вы можете решать любые задачи, а также, если будет интересно, дорешивать их дома и присылать решения; тем не менее, чтобы успеть поговорить не только про логику 1-го порядка, но и про монадическую логику 2-го порядка, на семинаре будут в первую очередь разобраны следующие задачи:

1 — 4 — 5 — 6(a-c,e-f) — 7 — 6d — 4

В конце семинара будут рассказаны наброски решений остальных задач (по желанию слушателей), а также упомянуты результаты, связанные с алгоритмической сложностью проверки, удовлетворяет ли граф данному свойству, записанному формулой MSO_1.

1. Задайте формулой FO_1 следующие семейства простых графов либо докажите, что это невозможно:
   (a) полные графы;
   (b) графы, каждая связная компонента которых – цикл;
   (c) звезды;
   (d) графы, не содержащие подграф, изоморфный фиксированному графу $G = (V, E)$;
   (e) двудольные графы.
2. (*) Докажите, что нельзя задать формулой FO_1 следующие семейства простых графов:
   (a) связные графы;
   (b) циклы.
3. Докажите, что FO_1 и FO_2 позволяют задавать одни и те же семейства простых графов.
4. Те семейства графов из заданий 1 и 2, которые не получилось задать формулой FO_1, задайте формулой MSO_1.
5. Как обобщить игры Эренфойхта на MSO_1 и MSO_2?
6. Задайте формулой MSO_1 или MSO_2 следующие семейства простых графов; если не получается задать формулой MSO_1, докажите, что это невозможно (иногда это может быть непросто). Как следствие, убедитесь, что MSO_2 позволяет задавать строго больше семейств графов, чем MSO_1.
   (a) цепи;
   (b) эйлеровы графы (содержащие цикл, проходящий по каждому ребру ровно 1 раз);
   (c) деревья (связные графы без циклов);
   (d) планарные графы (подсказка — нужна теорема Куратовского; вероятно, лучше вернуться к этому заданию после пункта 7);
   (e) сбалансированные двудольные графы (с равномощными долями);
   (f) гамильтоновы графы (содержащие цикл, проходящий через каждую вершину ровно 1 раз);
   (g) графы прямоугольных решеток $k \times n$ для всевозможных k и n.
   (h) графы квадратных решеток $n \times n$ для всевозможных n.
7. *Минор графа G* — граф H, получающийся из G применением нуля или более следующих операций: (1) стягивание ребра (удаление ребра и отождествление инцидентных ему вершин), (2) удаление ребра, (3) удаление изолированной вершины. Обозначение: $H \trianglelefteq G$.
   (a) Докажите, что для данного графа H множество $\{G : H \trianglelefteq G\}$ определимо в MSO_2.
   (b) Докажите, что если множество графов $Minors$ определимо в MSO_2, то и $\{G : \exists H \in Minors\ H \trianglelefteq G\}$ определимо в MSO_2.
   (c) Докажите, что если множество графов $Minors$ определимо в MSO_2, то и $\{G : \forall H \in Minors\ H \ntrianglelefteq G\}$ определимо в MSO_2.