Исчисление секвенций для логики предикатов: классической и интуиционистской

Сигнатура Ω состоит из набора константных символов, набора функциональных символов и набора предикатных символов. Каждому функциональному и каждому предикатному символу поставлено в соответствие натуральное число, называемое его *валентностью (арностью).* Выбор сигнатуры произволен и зависит от того, какую математическую теорию мы собираемся описывать.

Формальный язык логики предикатов в данной сигнатуре Ω строится следующим образом. Зададим два счётных множества — *свободных переменных* $\{y_1, y_2, \dots\}$ и *связанных переменных* $\{x_1, x_2, \dots\}$ Сначала определяется множество *термов.* Термы строятся из констант и свободных переменных применениями функциональных символов: если f — функциональный символ валентности k и $t_1, \dots, t_k$ — ранее построенные термы, то $f(t_1, \dots, t_k)$ — тоже терм.

Выражения вида $P(t_1, \dots, t_k)$, где $t_1, \dots, t_k$ — термы, а P — предикатный символ валентности k, называются *атомарными формулами. Формулы* логики предикатов строятся из атомарных с помощью логических связок $\wedge$ (и), $\vee$ (или), $\to$ (если — то), $\bot$ (ложь), $\top$ (истина) и кванторов $\forall$ и $\exists$. Квантор «навешивается» на формулу следующим образом: если A — формула, y — какая-то свободная переменная (вообще говоря, не обязательно входящая в A), а x — связанная переменная, не встречающаяся в A, то можно построить формулы $\forall x\, A[y := x]$ и $\exists x\, A[y := x]$ (запись „$[y := x]$“ означает замену всех вхождений y на x).

Как и в случае логики высказываний, отрицание $\neg A$ понимается как сокращение для $(A \to \bot)$; равносильность $A \leftrightarrow B$ понимается как сокращение для $(A \to B) \wedge (B \to A)$.

Если в формуле A выделена свободная переменная y, то вместо $A[y := t]$ (где t — произвольный терм) будем писать $A(t)$.

Секвенция — это выражение вида $\Gamma \Rightarrow \Delta$, где Γ и Δ — конечные мультимножества формул. Исчисление секвенций для классической логики предикатов задаётся следующими аксиомами и правилами вывода:

Аксиомы

$$\Gamma, \bot \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, A \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow \top, \Delta$$

Правила

$$\frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta} \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \to B \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \to B, \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\, F(x), F(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x\, F(x) \Rightarrow \Delta}\text{, где } t \text{ — произвольный терм} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow F(y), \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x\, F(x), \Delta}\text{, где } y \text{ не входит в } \Gamma \text{ и } \Delta$$

$$\frac{\Gamma, F(y) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x\, F(x) \Rightarrow \Delta}\text{, где } y \text{ не входит в } \Gamma \text{ и } \Delta \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow F(t), \exists x\, F(x), \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x\, F(x), \Delta}\text{, где } t \text{ — произвольный терм}$$

Понятие *выводимости* секвенций и формул определяется как в случае логики высказываний (см. предыдущий листок).

Генценовское исчисление для **интуиционистской** логики предикатов отличается от классического тем, что в правой части секвенции должна всегда быть **ровно одна формула.** Соответственно, нужно подправить аксиомы:

$$\Gamma, \bot \Rightarrow A \qquad \Gamma, A \Rightarrow A \qquad \Gamma \Rightarrow \top$$

а также некоторые правила — а именно, «правые» правила для $\vee$ и $\exists$ и «левое» правило для $\to$:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \vee B} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \vee B} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow F(t)}{\Gamma \Rightarrow \exists x\, F(x)} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma, B \Rightarrow C}{\Gamma, A \to B \Rightarrow C}$$

Во всех остальных «левых» правилах Δ заменяется на одну формулу C, а в «правых» — просто удаляется.

1. Постройте выводы следующих формул и секвенций в классическом случае:

а) $\exists x_1 \forall x_2\, P(x_1, x_2) \Rightarrow \forall x_2 \exists x_1\, P(x_1, x_2)$;

б) $\exists x\, A(x) \leftrightarrow \neg \forall x\, \neg A(x)$;

в) $\neg\forall x\, A(x) \leftrightarrow \exists x\, \neg A(x)$;
г) $\forall x\,(A(x) \vee B(x)) \Rightarrow \forall x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$;
д) $\exists x\,(A(x) \to B(x)) \Rightarrow (\forall x\, A(x)) \to (\exists x\, B(x))$;
е) $\exists x\,(A \to B(x)) \Rightarrow A \to \exists x\, B(x)$, где A не содержит x.

Для каждой из секвенций выясните, выводима ли она в интуиционистском случае.

Для секвенциального исчисления предикатов верна **теорема об устранении сечения:** если добавить к исчислению правило сечения

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

то множество выводимых секвенций не увеличится.

Формула называется *замкнутой,* если она не содержит свободных переменных. Произвольное множество замкнутых формул назовём *теорией.* Пусть $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \dots\}$ — теория. Будем говорить, что секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *выводима из теории* $\mathscr{A}$ (пишем $\mathscr{A} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$), если она выводима в исчислении предикатов, расширенном правилом сечения и дополнительными аксиомами $\Rightarrow A_i$ (с пустыми левыми частями) для каждой $A_i \in \mathscr{A}$. Запись $\mathscr{A} \vdash A$ означает $\mathscr{A} \vdash \Rightarrow A$.

2. Докажите, что $\mathscr{A} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ тогда и только тогда, когда существует такое конечное мультимножество Φ формул из $\mathscr{A}$, что в нашем исчислении (без дополнительных аксиом и правила сечения) выводима секвенция $\Phi, \Gamma \Rightarrow \Delta$.

3. *Теорема Робинсона.* Пусть теории $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ таковы, что их объединение противоречиво (т.е. $\mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2 \vdash \bot$). Докажите, то существует такая формула B, что $\mathscr{A}_1 \vdash B$ и $\mathscr{A}_2 \vdash \neg B$.

4. а) *Теорема Эрбрана.* Пусть в исчислении предикатов выводима секвенция $\Rightarrow \exists x\, A(x)$, где A не содержит кванторов. Докажите, что существует конечный набор термов $t_1, \dots, t_n$, для которого выводима секвенция $\Rightarrow A(t_1) \vee \dots \vee A(t_n)$.

б) Ясно, что теорема Эрбрана потеряет силу, если разрешить в левой части секвенции произвольную Γ: например, для $\Gamma = \exists x\, A(x)$ выводима $\Gamma \Rightarrow \exists x\, A(x)$, однако $\Gamma \Rightarrow \exists x\, A(t_1) \vee \dots \vee A(t_n)$ не выводима ни для каких $t_1, \dots, t_n$. А будет ли выполняться теорема для случая, когда Γ состоит из бескванторных формул?

5. *Теоремы Харропа.* Говорят, что подформула B *строго позитивно* входит в формулу A, если она не входит в формулу C никакой подформулы вида $C \to D$ в A („никогда не попадает в левую часть импликации“). Пусть Γ таково, что ни одна $A \in \Gamma$ не содержит строго позитивных вхождений формул вида $B \vee C$ или $\exists x\, F(x)$. **а)** Докажите, что если Γ обладает этим свойством и секвенция $\Gamma \Rightarrow E \vee F$ выводима в интуиционистском исчислении, то выводима одна из секвенций $\Gamma \Rightarrow E$ и $\Gamma \Rightarrow F$. **б)** Докажите, что если при тех же условиях выводима $\Gamma \Rightarrow \exists x\, F(x)$, то выводима $\Gamma \Rightarrow F(t)$ для некоторого терма t.

6. *«Кабацкая формула».* Выводима ли формула $\exists x_1\,(P(x_1) \to \forall x_2\, P(x_2))$ **а)** в интуиционистском; **б)** в классическом исчислении предикатов?

7. *Интерполяционная лемма Крейга.* Пусть A — формула сигнатуры Ω_1, B — формула сигнатуры Ω_2 и пусть секвенция $A \Rightarrow B$ выводима в исчислении предикатов. Докажите, что существует такая формула C (называемая *интерполянтом*), что выводимы секвенции $A \Rightarrow C$ и $C \Rightarrow B$ и в C входят только символы, принадлежащие одновременно обеим сигнатурам Ω_1 и Ω_2 (в частности, если сигнатуры не пересекаются, то C эквивалентна либо $\top$, либо $\bot$).