

## КОНЕЧНЫЕ АВТОМАТЫ И АВТОМАТНЫЕ ЯЗЫКИ

**Определение 1.** Конечный автомат – это пятёрка  $M = \langle Q, \Sigma, \Delta, I, F \rangle$ , где  $\Sigma$  – конечный алфавит,  $\Delta, Q$  – конечные множества,  $\Delta \subseteq Q \times \Sigma^* \times Q$ ,  $I \subseteq Q$ ,  $F \subseteq Q$ . Элементы  $Q$  называются состояниями, элементы  $I$  – начальными (initial) состояниями, элементы  $F$  – заключительными или допускающими (final) состояниями. Если  $\langle p, x, q \rangle \in \Delta$  то  $\langle p, x, q \rangle$  называется переходом из  $p$  в  $q$ , а слово  $x$  – меткой (label) этого перехода.

**Определение 2.** Путь конечного автомата – это кортеж  $\langle q_0, e_1, q_1, e_2, \dots, q_n \rangle$ , где  $0 \leq n$  и  $e_i = \langle q_{i-1}, w_i, q_i \rangle \in \Delta$  для каждого  $i$ . При этом  $q_0$  – начало пути,  $q_n$  – конец пути,  $n$  – длина пути,  $w_1 \dots w_n$  – метка пути.

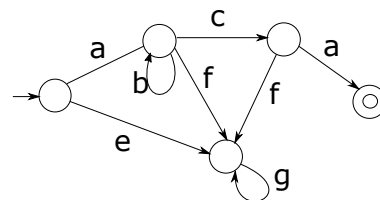
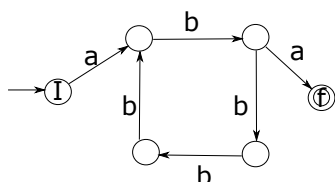
**Определение 3.** Путь называется успешным, если его начало принадлежит  $I$ , а конец принадлежит  $F$ .

**Определение 4.** Слово  $w$  допускается конечным автоматом  $M$ , если оно является меткой некоторого успешного пути.

**Определение 5.** Язык, распознаваемый конечным автоматом  $M$ , – это язык  $L(M)$ , состоящий из меток всех успешных путей (то есть из всех допускаемых данным автоматом слов).

**Определение 6.** Обращением или зеркальным образом слова  $w$  (обозначается  $w^R$ ) называется слово, составленное из символов слова  $w$  в обратном порядке. Обращение языка  $L^R \equiv \{w^R | w \in L\}$ .

**Определение 7.** Итерацией языка  $L$  –  $(L^*)$  называется язык  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$ . Эта операция называется также звёздочкой Клини.

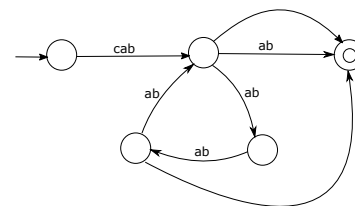
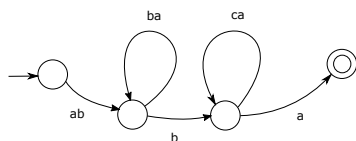


**Задача 1.** Какие языки обозначены на рисунках выше?

**Задача 2.** Существует ли такой автоматный язык  $L \subseteq \Sigma^*$ , что язык  $Pref(L) \equiv \{w | \exists z \in \Sigma^* : wz \in L\}$  не является автоматным? (Подсказка: попробуйте понять, что это за язык)

**Задача 3.** Докажите, что множество автоматных языков замкнуто относительно конкатенации, объединения, обращения и итерации.

**Задача 4.** Докажите, что множество автоматных языков замкнуто относительно дополнения и пересечения.



**Задача 5.** Найти произведение автоматных языков на рисунках выше. Какой язык задаёт 2-ой автомат?

**Задача 6.** Докажите, что для любого гомоморфизма  $h : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$  и автоматных языков  $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ ,  $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$  языки  $h(L_1)$  и  $h^{-1}(L_2)$  также являются автоматными.

**Определение 8.** Пусть  $L \subseteq \Sigma^*$  и  $y \in \Sigma^*$ . Тогда множество правых контекстов слова  $y$  относительно языка  $L$  определяется так:  $C_L^{(r)}(y) \equiv \{z \in \Sigma^* | yz \in L\}$

Аналогично определяется множество правых контекстов.

**Задача 7.** Найти множества правых и левых контекстов для произвольного слова  $w$  следующих языков:

- (1)  $L = \{ab^n | n \geq 0\}$ .
- (2)  $L = \{w | w \in \{a, b\}^*\}$ .
- (3)  $L = \{w | ww \in \{a, b\}^*\}$ .

**Задача 8.** Докажите, что язык  $L \subseteq \Sigma^*$  является автоматным тогда и только тогда, когда множество  $\{C_L^{(r)}(y) | y \in \Sigma^*\}$  конечно.

**Задача 9.** Используя прошлую задачу докажите, что следующие языки не являются автоматными:

- (1)  $L = \{a^n b^n | n \geq 0\}$ .
- (2)  $L = \{a^n b a^n | n \geq 0\}$ .
- (3)  $L = \{a^{(n^2)} | n \geq 0\}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $L$  – автоматный язык над алфавитом  $\Sigma$ . Тогда найдётся такое положительное целое число  $p$ , что для любого слова  $w \in L$  длины не меньше  $p$  найдутся слова  $x, y, z \in \Sigma^*$ , для которых верно  $xyz = w$ ,  $y \neq \epsilon$ ,  $|xy| \leq p$  и  $xy^i z \in L$  для всех  $i \geq 0$ .

**Задача 10.** Докажите, что следующие языки не являются автоматными с помощью предыдущей теоремы:

- (1)  $\{ab^n a^n | n \geq 0\}^*$ .
- (2)  $\{\omega \omega^R | \omega \in \{a, b\}^*\}^*$ .
- (3)  $\{\omega | \omega \in \{a, b\}^* | \omega|_a = |\omega|_b\}$ , где  $|\omega|_a$  – количество букв  $a$  в слове  $\omega$ .

**Задача 11.** Пусть  $\Sigma = \{a, b, c\}$ . При каких словах  $u \in \{a, b\}^*$  и  $v \in \{a, b\}^*$  язык  $\{u^m c v^m | m \geq 0\}^*$  является автоматным?

**Задача 12.** Докажите, что прошлая теорема не является критерием.