Интуиционистская логика

В. Е. Плиско

10 и 17 декабря 2021 г.

Интуиционистское исчисление высказываний

В 1908 г. появилась работа нидерландского математика Брауэра «Недостоверность логических принципов». В ней отмечалось, что правила классической логики, дошедшие до нас от Аристотеля (IV век до н. э.), абстрагированы от обращения с конечными совокупностями. Забывая об этом, впоследствии эту логику ошибочно приняли за нечто первичное по отношению к математике и стали применять ее к математике бесконечных множеств. Принципом классической логики, который Брауэр не принимает для бесконечных множеств, является закон исключенного третьего, выражаемый формулой $P \vee \neg P$. Брауэр выдвинул программу построения математики и логики на так называемых интуиционистских принципах. При построении интуициониствой логики исходным логическим понятиям придается несколько иной смысл, чем в традиционной, классической логике. В традиционной логике высказывание понимается как предложение, которое может быть истинным или ложным, так что истинностное значение есть атрибут всякого высказывания. С точки зрения интуиционизма, высказывание считается истинным, если имеется его доказательство, или обоснование. В контексте такой трактовки истинности высказывания понимаются традиционные логические операции. Высказывание $A \wedge B$ считается истинным тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания A и B, т. е. мы располагаем обоснованием каждого из них. Высказывание $A \vee B$ считается истинным тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из высказываний A и B, т. е. мы располагаем обоснованием высказывания A или обоснованием высказывания B. Высказывание $A \to B$ считается истинным тогда и только тогда, когда имеется общий метод, позволяющий любое обоснование высказывания A преобразовать в обоснование высказывания B. Пусть $P(x)$ — некоторое свойство, которым могут обладать объекты из данного множества M. Тогда высказывание $\exists x\, P(x)$ считается истинным, если для некоторого $a \in M$ мы имеем обоснование высказывания $P(a)$. Высказывание $\forall x\, P(x)$ считается истинным, если имеется общий метод, позволяющий для любого $a \in M$ получить обоснование высказывания $P(a)$. Высказывание A считается ложным, если удалось доказать высказывание $A \to \bot$, где $\bot$ — некоторое абсурдное высказывание, не имеющее обоснования. Высказывание $A \to \bot$ обозначается $\neg A$.

Первая попытка аксиоматизации интуиционистской логики высказываний была предпринята А. Н. Колмогоровым в 1925 г. Позднее были предложены другие системы аксиом. Они эквивалентны между собой в том смысле, что из них выводимы одни и те же формулы, и эквивалентны системе Гейтинга:

И1. $A \to (B \to A)$;
И2. $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$;
И3. $A \land B \to A$;
И4. $A \land B \to B$;
И5. $A \to (B \to A \land B)$;
И6. $A \to A \lor B$;
И7. $B \to A \lor B$;
И8. $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \lor B \to C))$;
И9. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$;
И10. $A \to (\neg A \to B)$.

Эти схемы аксиом вместе с правилом modus ponens

$$\frac{A,\ A \to B}{B}\ (\mathrm{MP})$$

задают интуиционистское исчисление высказываний (ИИВ).

Имеет место следующая теорема Гливенко.

Теорема 1. *Если A — тавтология, то формула $\neg\neg A$ выводима в ИИВ.*

Задача.

Доказать, что следующие формулы выводимы в ИИВ:

1. $A \to A$;
2. $(A \to \neg A) \to \neg A$;
3. $A \lor A \to A$;
4. $(\neg A \lor B) \to (A \to B)$;
5. $\neg(A \lor B) \to (\neg A \land \neg B)$;
6. $\neg(A \to B) \to \neg B$;
7. $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$;
8. $\neg\neg(A \lor \neg A)$.

Модели Крипке для логики высказываний

Модель Крипке для логики высказываний — это набор $\mathcal{K} = (K, \preceq, \Vdash)$, где $(K, \preceq)$ — частично упорядоченное множество, называемое шкалой Крипке, а $\Vdash$ — соответствие между K и множеством всех переменных такое, что если $\alpha \Vdash P$ и $\alpha \preceq \beta$, то $\beta \Vdash P$. Соответствие $\Vdash$ называется оценкой. Элементы множества K можно трактовать как «моменты времени», причем $\alpha \preceq \beta$ означает, что момент α предшествует моменту β. Выражение $\alpha \Vdash P$ читается «α вынуждает P» или «P истинно в момент α». Интуитивно $\alpha \Vdash P$ означает, что в момент α утверждение P является доказанным, а условие, что если $\alpha \Vdash P$ и $\alpha \preceq \beta$, то $\beta \Vdash P$, выражает принцип сохранения истинности.

На основе соответствия $\Vdash$ определяется соответствие между множеством K и множеством всех формул, также обозначаемое $\Vdash$. Соответствие $\alpha \Vdash A$ задается индукцией по построению формулы A. Для переменной A оно уже определено. Далее полагаем:

$\alpha \Vdash (A \wedge B) \rightleftharpoons [\alpha \Vdash A \wedge \alpha \Vdash B]$;

$\alpha \Vdash (A \vee B) \rightleftharpoons [\alpha \Vdash A \vee \alpha \Vdash B]$;

$\alpha \Vdash (A \to B) \rightleftharpoons \forall\beta\, [\alpha \preceq \beta \Rightarrow (\beta \nVdash A \vee \beta \Vdash B]$;

$\alpha \Vdash \neg A \rightleftharpoons \forall\beta\, [\alpha \preceq \beta \Rightarrow \beta \nVdash A]$.

Говорят, что формула A истинна в модели Крипке $\mathcal{K} = (K, \preceq, \Vdash)$, если $(\forall\alpha \in K)\, \alpha \Vdash A$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Если пропозициональная формула A выводима в ИИВ, то A истинна в любой модели Крипке.*

Верно и обратное утверждение.

Теорема 3. *Если пропозициональная формула A невыводима в ИИВ, то существует контрмодель Крипке для A.*

Более того, для всякой невыводимой в ИИВ формулы можно построить конрмодель Крипке с конечной шкалой.

Теорема 2 позволяет доказывать невыводимость в ИИВ тех или иных формул путем построения контрмоделей Крипке для них.

Пример. Докажем, что формула $P \vee \neg P$ не выводится в ИИВ, построив для нее контрмодель Крипке. Положим $K = \{\alpha, \beta\}$, причем $\alpha \preceq \beta$. Пусть $\alpha \nVdash P$, $\beta \Vdash P$. Нетрудно проверить, что $\alpha \nVdash \neg P$, так что $\alpha \nVdash P \vee \neg P$.

Задача.

Построить контрмодели Крипке для следующих формул:

1. $\neg\neg P \to P$;
2. $\neg P \vee \neg\neg P$;
3. $((P \to Q) \to P) \to P)$;
4. $\neg(P \wedge Q) \to (\neg P \vee \neg Q)$;
5. $\neg(P \to Q) \to P$.

Интуиционистское исчисление предикатов

Пусть фиксирована сигнатура Ω, содержащая лишь константы и предикатные символы. Интуиционистское исчисление предикатов (ИИП) в сигнатуре Ω задается следующими схемами аксиом:

1. $A \to (B \to A)$;
2. $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$;
3. $A \wedge B \to A$;
4. $A \wedge B \to B$;
5. $A \to (B \to A \wedge B)$;
6. $A \to A \vee B$;
7. $B \to A \vee B$;
8. $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$;
9. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$;
10. $A \to (\neg A \to B)$;
11. $\forall v\, A(v) \to A(t)$;
12. $A(t) \to \exists v\, A(v)$.

В схемах 11 и 12 $A(v)$ — формула языка Ω, v — переменная, t — терм, свободный для v в $A(v)$.

Правила вывода ИИП:

(I) $\dfrac{A, A \to B}{B}$ (modus ponens; MP);

(II) $\dfrac{A \to B}{\exists v\, A \to B}$ (удаление квантора существования);

(III) $\dfrac{B \to A}{B \to \forall v\, A}$ (введение квантора всеобщности).

В правилах (II) и (III) B не содержит свободных вхождений v.

Задача.

Доказать, что следующие формулы выводимы в ИИП:

1. $\neg\exists x\, P(x) \to \forall x\, \neg P(x)$;
2. $\exists x\, \neg P(x) \to \neg\forall x\, P(x)$;
3. $\exists x\, (P \to Q(x)) \to (P \to \exists x\, Q(x))$.

Модели Крипке для логики предикатов

Модель Крипке для языка Ω имеет вид $\mathcal{K} = (K, \preceq, D, \Vdash)$, где

$(K, \preceq)$ — частично упорядоченное множество (шкала Крипке),

D — функция, каждому $\alpha \in K$ сопоставляющая непустое множество D_α, причем $D_\alpha \subseteq D_\beta$, если $\alpha \preceq \beta$.

Если Ω содержит константу c, то ей сопоставляется объект $\bar{c}$, который принадлежит любому множеству D_α для $\alpha \in K$. В дальнейшем c отождествляется с элементом $\bar{c}$.

Наконец, $\Vdash$ — некоторое соответствие между множеством K и множеством всех атомов вида $P(a_1, \ldots, a_n)$, где P есть (n-местный) предикатный символ сигнатуры Ω, а $a_1, \ldots, a_n$ — элементы множества $\bigcup\limits_{\alpha \in K} D_\alpha$, обладающее тем свойством, что если $\alpha \in K$, $P(a_1, \ldots, a_n)$ — атом указанного вида, и $\alpha \Vdash P(a_1, \ldots, a_n)$, то $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq D_\alpha$, и если $\alpha \preceq \beta$, то $\beta \Vdash P(a_1, \ldots, a_n)$. Соответствие $\Vdash$ называется оценкой атомов в данной модели Крипке. Как и в случае моделей Крипке для логики высказываний, $\alpha \Vdash P(a_1, \ldots, a_n)$ читается «α вынуждает $P(a_1, \ldots, a_n)$» или «$P(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в момент α».

Интуитивный смысл моделей Крипке для логики предикатов аналогичен смыслу моделей Крипке для логики высказываний. Элементы множества K можно трактовать как моменты времени. Множество D_α можно понимать как множество объектов, построенных к моменту α или доступных для исследования в этот момент. Условие

$$\alpha \preceq \beta \Rightarrow D_\alpha \subseteq D_\beta$$

означает, что имеющиеся в данный момент объекты в будущем не исчезают. Интуитивно $\alpha \Vdash P(a_1, \ldots, a_n)$ означает, что к моменту α доказано утверждение $P(a_1, \ldots, a_n)$, причем доказанные утверждения остаются таковыми и в будущем, так что имеет место принцип сохранения истинности.

Соответствие $\Vdash$ между K и множеством атомов расширяется до соответствия $\Vdash$ между K и множеством высказываний следующим образом. Пусть $\alpha \in K$, а A — высказывание сигнатуры Ω, расширенной за счет констант для обозначения всех элементов D_α. Соответствие $\alpha \Vdash A$ задается индукцией по логической длине A. Для атомов оно уже определено. Далее полагаем:

$\alpha \Vdash (A \wedge B) \rightleftharpoons [\alpha \Vdash A$ и $\alpha \Vdash B]$;

$\alpha \Vdash (A \vee B) \rightleftharpoons [\alpha \Vdash A$ или $\alpha \Vdash B]$;

$\alpha \Vdash (A \to B) \rightleftharpoons (\forall \beta \succeq \alpha)\, [\beta \nVdash A$ или $\beta \Vdash B]$;

$\alpha \Vdash \neg A \rightleftharpoons (\forall \beta \succeq \alpha)\, \beta \nVdash A$;

$\alpha \Vdash \exists v\, A(v) \rightleftharpoons (\exists a \in D_\alpha)\, \alpha \Vdash A(a)$;

$\alpha \Vdash \forall v\, A(v) \rightleftharpoons (\forall \beta \succeq \alpha)\, (\forall a \in D_\beta)\, \beta \Vdash A(a)$.

Здесь $\beta \succeq \alpha$ означает $\alpha \preceq \beta$, а $A(a)$ есть результат подстановки константы a вместо переменной v в формулу $A(v)$.

Говорят, что формула A истинна в модели $\mathcal{K} = (K, \preceq, D, \Vdash)$, и пишут $\mathcal{K} \models A$, если для любого $\alpha \in K$ имеет место $\alpha \Vdash A$. Если формула A не истинна в модели Крипке $\mathcal{K}$, т. е. $\mathcal{K} \not\models A$, то $\mathcal{K}$ называют контромоделью для A.

Имеет место следующая теорема о корректности ИИП относительно моделей Крипке:

Теорема 4. *Если замкнутая формула языка Ω выводима в ИИП, то она истинна в любой модели Крипке для языка Ω.*

Эта теорема позволяет доказывать невыводимость в ИИП тех или иных формул путем построения для них контрмоделей Крипке.

Пример. Докажем, что формула $\neg\neg\forall x\,(P(x) \vee \neg P(x))$ не выводится в ИИП, построив контрмодель для этой формулы. Положим $K = \mathbb{N}$, причем $m \preceq n \rightleftharpoons m \leq n$ для любых $m, n \in \mathbb{N}$. Пусть $D_n = \{0, \ldots, n\}$. Положим $m \Vdash P(n) \rightleftharpoons m > n$. Допустим, что

$$0 \Vdash \neg\neg\forall x\,(P(x) \vee \neg P(x)). \tag{1}$$

В силу определения отношения $\Vdash$ для отрицания (1) означает, что

$$(\forall m \in \mathbb{N})\, m \nVdash \neg\forall x\,(P(x) \vee \neg P(x)).$$

В частности, $0 \nVdash \neg\forall x\,(P(x) \vee \neg P(x))$. Это означает, что

$$m \Vdash \forall x\,(P(x) \vee \neg P(x))$$

для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Отсюда и из определения соответствия $\Vdash$ для квантора всеобщности следует $m \Vdash P(m) \vee \neg P(m)$, так как $m \in D_m$. В силу определения отношения $\Vdash$ для дизъюнкции это означает, что либо 1) $m \Vdash P(m)$, либо 2) $m \Vdash \neg P(m)$. Однако ни то, ни другое не имеет места. Действительно, условие 1) не выполняется в силу определения отношения $\Vdash$ для атомов. Докажем, что условие 2) также не выполняется. Допустим противное, т. е. $m \Vdash \neg P(m)$. В силу определения отношения $\Vdash$ для отрицания это означает, что $(\forall n \geq m)\, n \nVdash P(m)$. Но это не так, ибо $m + 1 \Vdash P(m)$. Таким образом, предположение (1) приводит к противоречию. Значит,

$$0 \nVdash \neg\neg\forall x\,(P(x) \vee \neg P(x)),$$

и построенная модель Крипке является контрмоделью для рассматриваемой формулы.

Имеет место теорема о полноте ИИП относительно моделей Крипке.

Теорема 5. *Если замкнутая формула A невыводима в ИИП, то существует контрмодель Крипке для A.*

Задача.

Построить контрмодели Крипке для следующих предикатных формул:

1. $\neg\forall x\, P(x) \to \exists x\, \neg P(x)$;
2. $(P \to \exists x\, Q(x)) \to \exists x\, (P \to Q(x))$;
3. $(\forall x\, (P(x) \vee \neg P(x)) \wedge \neg\neg\exists x\, P(x) \to \exists x\, P(x)$.

Дополнительные материалы:

1. В.Е.Плиско, В.Х.Хаханян. Интуиционистская логика. М.: Мех.-мат. МГУ, 2009.
2. В.Е.Плиско. Конструктивная логика. Лекции на Малом мехмате: https://www.youtube.com/playlist?list=PLFAUjUzyuqi-pF3OaoGioIGWLofTbjUrB
3. В. Е. Плиско. Лекции по конструктивной логике. М.: Луч, 2021