О числе монотонных булевых функций n переменных[1]

Жорж Ансель

Задача определения числа $\psi(n)$ элементов дистрибутивной свободной структуры с n образующими (равного числу монотонных[2]) булевых функций n переменных) была поставлена Дедекиндом в 1897 г. [1]. Она была решена этим автором для $n=4$.

Р. Черч решил ее в 1940 г. [2] для $n=5$.

М. Уорд сделал то же самое для $n=6$ в 1946 г. [3].

В 1954 г. [4] Э. Н. Гилберт показал, что $\psi(n)$ удовлетворяет неравенствам

$$2^{C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}} \leqslant \psi(n) \leqslant n^{C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}} + 2,$$

где $[n/2]$ — наибольшее целое число, меньшее или равное $n/2$.

В серии публикаций В. К. Коробкова с 1962 по 1965 г. получены результаты [5]

$$2^{C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}} \leqslant \psi(n) \leqslant 2^{4,23 C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}(1+\varepsilon_n)} \quad (\varepsilon_n \to 0 \text{ при } n \to \infty);$$

$$2^{C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}} \leqslant \psi(n) \leqslant 2^{5 C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}}.$$

Тот же автор показал, что минимальное число $\varphi(n)$ операций наилучшего алгоритма распознавания одной произвольной монотонной булевой функции удовлетворяет неравенствам[3])

$$C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]} + C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]+1} \leqslant \varphi(n) \leqslant B C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}(1+\varepsilon_n),$$

---

[1]) Hansel G., Sur le nombre des fonctions booléennes monotones de n variables, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **262**, № 20 (1966), 1088—1090.

[2]) У автора monotones croissantes. Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется монотонной, если $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leqslant f(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ для всяких двух наборов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, таких, что $\alpha_1 \leqslant \beta_1, \ldots, \alpha_n \leqslant \beta_n$. — *Прим. ред.*

[3]) Определение функции $\varphi(n)$ см. в [5], стр. 7. — *Прим. ред.*

где

$$B=\frac{8}{(\sqrt[3]{16}-1)^{3/2}}\simeq 4{,}26.$$

Цель настоящей работы — установить следующие результаты:

$$2^{C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}}\leqslant\psi(n)\leqslant 3^{C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}};$$

$$\varphi(n)=C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}+C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}.$$

Лемма. *Единичный n-мерный куб B_n, наделенный обычным отношением порядка* (ср. [4] или [5]), *может быть покрыт множеством из $C_n^{[n/2]}$ попарно непересекающихся цепей*[1], *обладающих следующими свойствами*:

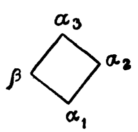
a) *число цепей длины $n-2p+1$ равно $C_n^p-C_n^{p-1}$* $(0\leqslant p\leqslant[n/2])$ [минимальный элемент каждой такой цепи есть набор с p единицами и $n-p$ нулями, максимальный — с p нулями и $n-p$ единицами];

b) *если заданы три элемента $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3$, образующие цепь и принадлежащие одной и той же цепи длины $n-2p+1$, то относительное дополнение α_2 на интервале* $[\alpha_1, \alpha_3]$[2]) *принадлежит цепи длины $n-2p-1$.*

Доказательство. Доказательство проводится по индукции. Для $n=1$, 2 лемма верна.

1) Куб B_n делится на два подмножества B_{n-1}^1 и B_{n-1}^2 [минимальное и максимальное], изоморфные кубу B_{n-1} и полученные соответственно присоединением 0 или 1 слева к координатам куба B_{n-1}. В предположении, что лемма верна для куба B_{n-1}, мы покроем B_n множеством цепей [определяемых следующим образом]:

1° Пусть B_{n-1}^1 и B_{n-1}^2 покрыты каждое множеством $C_{n-1}^{[(n-1)/2]}$ цепей, обладающих свойствами, указанными в формулировке леммы [вторая часть свойства a) — без учета добавления разряда]. Пусть C_1 — одна из цепей B_{n-1}^1, и пусть y_1 — ее наибольший элемент.



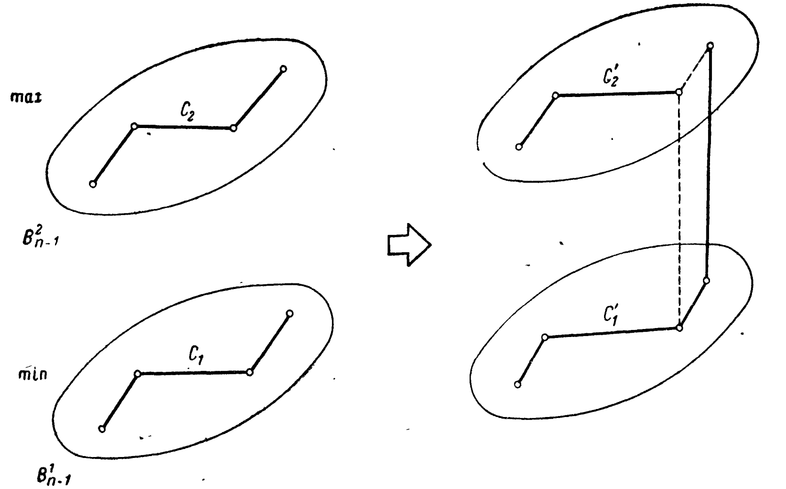
[Рис. 1.]

[1]) Цепь — это последовательность $\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \ldots, \beta^{(q)}$ элементов из B_n, такая, что $\beta^{(i+1)}$ получается из $\beta^{(i)}$ заменой одного нуля (в наборе координат) на единицу. — *Прим. ред.*

[2]) То есть четвертый элемент β, образующий вместе с α_1, α_2 и α_3 квадрат (рис. 1). — *Прим. ред.*

2° Мы продолжим C_1, добавив к ней наибольший элемент y_2 цепи C_2, изоморфной C_1 в B_{n-1}^2 [см. рис. 2].

3° Отнимем у C_2 ее наибольший элемент y_2. [После осуществления преобразований 2° и 3° для новых цепей будет выполнена вторая часть свойства a).]



[Рис. 2.]

4° Произведем те же самые операции со всеми цепями из B_{n-1}^1.

Тогда цепи, покрывающие B_n, не будут пересекаться и число цепей длины $n - 2p+1$ будет равно

$$(C_{n-1}^p - C_{n-1}^{p-1}) + (C_{n-1}^{p-1} - C_{n-1}^{p-2}) = C_n^p - C_n^{p-1}.$$

2) Свойство b) леммы является непосредственным следствием вышеприведенной конструкции [см. дополнение редактора перевода].

Теорема 1. *Минимальное число операций $\varphi(n)$ наилучшего алгоритма распознавания произвольной монотонной булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть*

$$\varphi(n) = C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]} + C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}.$$

Доказательство. Из [5] мы уже знаем, что

$$\varphi(n) \geqslant C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]} + C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}.$$

С другой стороны, свойство b) вышеупомянутой леммы и монотонный характер функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ позволяют сделать следующий вывод: если значение $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ известно во всех вершинах цепей длины $n-2p-1$, то в каждой цепи длины $n-2p+1$ существуют самое большее две (соседние) вершины, где значения $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ остаются неопределенными. В результате получаем, что [1])

$$\varphi(n) \leqslant C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]} + C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}.$$

Теорема 2. *Число $\psi(n)$ монотонных булевых функций n переменных удовлетворяет неравенствам* [2])

$$2^{C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}} \leqslant \psi(n) \leqslant 3^{C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}}.$$

Доказательство. Нижняя оценка $\psi(n)$ уже доказана в [4].

Пусть α_1 и α_2 ($\alpha_1 < \alpha_2$) — две соседние вершины, оставшиеся неопределенными в цепи из B_n. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ может принимать в этих вершинах лишь следующие наборы значений: (0, 0) или (0, 1), или (1, 1). В результате получаем, что $\psi(n) \leqslant 3^{C_n^{[n/2]}}$.

Следствие. *Число функциональных элементов (конъюнкций, дизъюнкций, отрицаний), достаточное для реализации произвольной монотонной булевой функции [n переменных], оценивается сверху величиной*

$$(\log_2 3) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2^n}{n^{3/2}} [1 + \varepsilon(n)], \quad \varepsilon(n) \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

Это следствие получается применением метода локального кодирования, описанного в [5] [3]) (для теоремы 4а), с использованием приведенной выше верхней оценки.

---

[1]) $\varphi(n) \leqslant$ (число цепей длины 1) + 2 (число цепей длины $\geqslant 2$). — *Прим. ред.*

[2]) Если n — четное, то можно записать

$$2^{C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}} \leqslant \psi(n) \leqslant 2^{C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]} - C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}} 3^{C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}}.$$

[3]) Более подробно о принципе локального кодирования см. в [6]. — *Прим. ред.*

Дополнение редактора перевода

Цепи в B_n — двух сортов: «удлиненные», возникшие из цепей в B^1_{n-1}, и «укороченные», возникшие из цепей в B^2_{n-1}. Рассмотрим несколько случаев для трех последовательных элементов $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3$, лежащих на построенной цепи C в B_n (длины $n-2p+1$).

I. C — удлиненная цепь, и α_3 не есть ее максимальный элемент. В этом случае α_1, α_2, α_3 лежат на некоторой «старой» цепи в B^1_{n-1} (длины $n-2p$). Относительное дополнение элемента α_2 находится на некоторой цепи C' (длины $n-2p-2$) в B^1_{n-1}, которая будет продолжена при переходе к B_n до цепи длины $n-2p-1$.

II. C — удлиненная цепь, и α_3 — ее максимальный элемент. Пусть $C=C'_1$ (рис. 2) возникла в результате удлинения цепи C_1 из B^1_{n-1}; C_2 — цепь в B^2_{n-1}, изоморфная C_1; C'_2 — укороченная цепь, возникшая из C_2 (C'_2 имеет длину $n-2p-1$). Тогда относительное дополнение элемента α_2 есть максимальный элемент цепи C'_2.

III. C — укороченная цепь. Пусть $C=C'_2$ возникла из цепи C_2 (длины $n-2p+2$) в B^2_{n-1}. Тогда, во-первых, α_3 — не максимальный элемент цепи C_2 и, во-вторых, в силу второй части свойства а) максимальный элемент α цепи C_2 имеет $p-1$ нулей. В силу свойства b) относительное дополнение β элемента α_2 принадлежит некоторой цепи $\tilde{C}$ длины $n-2p$ в $B^2{}_{n-1}$; максимальный элемент этой цепи имеет p нулей. Так как $\beta<\alpha_3<\alpha$, то β имеет не менее $p+1$ нулей и поэтому не является максимальным элементом цепи $\tilde{C}$. Следовательно, β принадлежит укороченной цепи длины $n-2p-1$, получающейся из $\tilde{C}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dedekind R., Ueber Zerlegungen von Zahlen durch ihre grossten gemeinsamen Teiler, Festschrift Hoch. Braunschweig, 1897 u. ges. Werke, II, 103—148.
2. Church R., Numerical analysis of certain free distributive structure, *Duke Math. J.*, **6** (1940), 732—734.
3. Ward M., Abstract 52-5-135, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1946.
4. Gilbert E. N., Lattice theoretic properties of frontal switching functions, *J. Math. Phys.*, **33**, № 1 (1954), 57—67. (Русский перевод: Гилберт Э. Н., Теоретико-структурные свойства замыкающих переключательных функций, Кибернетический сборник, вып. 1, ИЛ, М., 1960.)
5. Коробков В. К., О монотонных функциях алгебры логики, сб. Проблемы кибернетики, вып. 13, изд-во «Наука», М., 1965.

6*. Лупанов О. Б., Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования, сб. Проблемы кибернетики, вып. 14, изд-во «Наука», М., 1965, 31—110.