Программа кандидатского экзамена по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Алгебра

1. Свободные группы. Теорема Нильсена–Шрайера. Копредставления групп (задание образующими и определяющими соотношениями); примеры. [2, 8]

2. Расширения полей. Базис трансцендентности. Конечные расширения. Алгебраическое замыкание подполя. Алгебраические числа. Сепарабельные расширения. Теорема о примитивном элементе. [5]

3. Поле разложения многочлена. Расширения Галуа. Основная теорема теории Галуа. Группа Галуа кубического многочлена и формула Кардано. Конечные поля. [5, 6, 11]

4. Кольца главных идеалов, их факториальность. Теорема о строении конечнопорожденных модулей над кольцами главных идеалов, её применение к абелевым группам и линейным операторам. [5, 11]

5. Нётеровы кольца и модули. Нётеровость кольца многочленов (теорема Гильберта о базисе идеала). Конечные расширения нётеровых колец. Целое замыкание подкольца. Целозамкнутые кольца. Целые алгебраические числа. Строение аддитивной группы целых чисел поля алгебраических чисел (конечного расширения поля рациональных чисел). [1, 3, 5, 10]

6. Конечнопорожденные коммутативные алгебры и аффинные алгебраические многообразия. Теорема Гильберта о нулях. Топология Зарисского и неприводимые компоненты алгебраического многообразия. Поле рациональных функций и размерность неприводимого алгебраического многообразия. [5, 9, 16]

7. Мономиальные упорядочения. Базис Грёбнера полиномиального идеала. S-полином и алгоритм Бухбергера. Критерии совместности и конечности числа решений системы алгебраических уравнений над алгебраически замкнутым полем. [9, 13]

8. Линейные представления групп и ассоциативных алгебр. Неприводимые и вполне приводимые представления. Полная приводимость линейных представлений компактных (в частности, конечных) групп. Морфизмы представлений. Лемма Шура. Изотипные компоненты вполне приводимого представления. Теорема Бернсайда. Неприводимые представления прямого произведения групп. [5, 7, 14, 15]

9. * [1] Радикал ассоциативного кольца. Нильпотентность радикала артинова кольца. Радикал коммутативного кольца. Теорема плотности для полупростых модулей. Строение полупростых артиновых колец. [12, 15, 10]

10. * Циклические алгебры, в том числе обобщенная алгебра кватернионов. Теоремы Фробениуса и Веддербёрна. [12, 15]

11. * Групповая алгебра конечной группы, её полупростота. Центр групповой алгебры и характеры неприводимых представлений конечной группы. Соотношения ортогональности. [5, 15, 14]

12. * Группы Ли и их касательные алгебры Ли. Классические линейные группы Ли. Присоединенное представление группы Ли. Экспоненциальное отображение. Восстановление гомоморфизма связной группы Ли по его дифференциалу. Полная приводимость линейных представлений групп $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $SL_2(\mathbb{C})$ (унитарный трюк). Неприводимые представления группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. [5, 6]

Список литературы

[1] М. Атья, И. Макдональд. Введение в коммутативную алгебру. М.: Факториал Пресс, 2003.
[2] Ю. А. Бахтурин. Основные структуры современной алгебры. М.: Наука, 1990.
[3] Н. Бурбаки. Коммутативная алгебра. М.: Мир, 1971.
[4] Б. Л. Ван дер Варден. Алгебра. М.: Наука, 1972.
[5] Э. Б. Винберг. Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2013.
[6] А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть III: Основные структуры алгебры. М.: МЦНМО, 2009.
[7] К. Кэртис, И. Райнер. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М., 1969.
[8] М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков. Основы теории групп. М.: Наука, 1982.
[9] Д. Кокс, Дж. Литтл, Д. О'Ши. Идеалы, многообразия и алгоритмы. М.: Мир, 2000.
[10] И. Ламбек. Кольца и модули. Факториал, 2005.
[11] С. Ленг. Алгебра. М.: Мир, 1968.
[12] Р. Пирс. Ассоциативные алгебры. М.: Мир, 1986.
[13] В. В. Прасолов. Многочлены. М.: МЦНМО, 2003.
[14] Ж.-П. Серр. Линейные представления конечных групп. М.: Мир, 1970.
[15] И. Херстейн. Некоммутативные кольца, М.: Мир, 1972.
[16] И. Р. Шафаревич. Основы алгебраической геометрии, т. 1. М.: Наука, 1988.

Вопросы билетов

1. Свободные группы. Теорема Нильсена-Шрейера. Задание групп образующими и определяющими соотношениями.
2. Расширения полей. Базис трансцендентности.

[1]* Вопросы не входят в программу для аспиратнов кафедр логики и теории чисел

3. Конечные расширения. Поле разложения многочлена.
4. Алгебраическое замыкание подполя. Алгебраические числа. Сепарабельные расширения и теорема о примитивном элементе.
5. Расширения Галуа. Основная теорема теории Галуа. Группа Галуа кубического многочлена и формула Кардано.
6. Конечные поля.
7. Кольца главных идеалов, их факториальность. Теорема о строении конечнопорожденных модулей над кольцами главных идеалов, её применение к абелевым группам и линейным операторам.
8. Нётеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе.
9. Целое замыкание подкольца. Целозамкнутые кольца. Целые алгебраические числа.
10. Строение аддитивной группы целых чисел поля алгебраических чисел (конечного расширения поля рациональных чисел).
11. Конечнопорожденные коммутативные алгебры и аффинные алгебраические многообразия. Теорема Гильберта о нулях.
12. Топология Зарисского и неприводимые компоненты алгебраического многообразия. Поле рациональных функций и размерность неприводимого алгебраического многообразия.
13. Мономиальные упорядочения. Базис Грёбнера полиномиального идеала. S-полином и алгоритм Бухбергера. Критерии совместности и конечности числа решений системы алгебраических уравнений над алгебраически замкнутым полем.
14. Линейные представления групп и ассоциативных алгебр. Неприводимые и вполне приводимые представления. Полная приводимость линейных представлений компактных (в частности, конечных) групп. Морфизмы представлений. Лемма Шура.
15. Теорема Бернсайда. Неприводимые представления прямого произведения групп.
16. * Радикал ассоциативного кольца. Нильпотентность радикала артинова кольца. Радикал коммутативного кольца.
17. Теорема плотности для полупростых модулей. Строение полупростых артиновых колец.
18. * Циклические алгебры, в том числе обобщенная алгебра кватернионов. Теоремы Фробениуса и Веддербёрна. [12, 15]
19. * Групповая алгебра конечной группы, её полупростота. Центр групповой алгебры и характеры неприводимых представлений конечной группы. Соотношения ортогональности.
20. * Группы Ли и их касательные алгебры Ли. Классические линейные группы Ли. Присоединенное представление группы Ли. Экспоненциальное отображение.
21. * Восстановление гомоморфизма связной группы Ли по его дифференциалу. Полная приводимость линейных представлений групп $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $SL_2(\mathbb{C})$ (унитарный трюк). Неприводимые представления группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.