

Динамическая эпистемическая логика

Виталий Долгоруков

Международная лаборатория логики, лингвистики и формальной философии
НИУ ВШЭ

30 ноября 2023 г.

Динамика знания и мнения

Динамика знания и мнения

1. Борис открывает конверт и видит, что внутри бумажка с надписью «да»

Динамика знания и мнения

1. Борис открывает конверт и видит, что внутри бумажка с надписью «да»
2. Маргарита сначала думала, что лучше купить красное платье,

Динамика знания и мнения

1. Борис открывает конверт и видит, что внутри бумажка с надписью «да»
2. Маргарита сначала думала, что лучше купить красное платье, потом подумала, что лучше все-таки розовое,

Динамика знания и мнения

1. Борис открывает конверт и видит, что внутри бумажка с надписью «да»
2. Маргарита сначала думала, что лучше купить красное платье, потом подумала, что лучше все-таки розовое, потом решила купить красное

Динамика знания и мнения

1. Борис открывает конверт и видит, что внутри бумажка с надписью «да»
2. Маргарита сначала думала, что лучше купить красное платье, потом подумала, что лучше все-таки розовое, потом решила купить красное

В чем разница между 1 и 2?

Динамика знания и мнения

1. Борис открывает конверт и видит, что внутри бумажка с надписью «да»
2. Маргарита сначала думала, что лучше купить красное платье, потом подумала, что лучше все-таки розовое, потом решила купить красное

В чем разница между 1 и 2?

- hard update** жесткое обновление, обновление точной информации, меняется знание, результат обновления не может быть пересмотрен
- soft update** мягкое обновление, обновление неточной информации, меняется мнение, результат обновления может быть пересмотрен

Обновление точной информации (hard update)

ОБНОВЛЕНИЕ ТОЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Публичное объявление (public announcement)

Публичное объявление (public announcement)

φ - предложение

Публичное объявление (public announcement)

φ - предложение

$!\varphi$ - высказывание (с условиями «public announcement»)

Публичное объявление (public announcement)

φ - предложение

$!\varphi$ - высказывание (с условиями «public announcement»)

$[!\varphi]\psi$ - после публичного объявления φ верно ψ

Публичное объявление

Если $\mathcal{M} = (W, \{\sim_i\}_{i \in \mathcal{A}}, V)$ – модель эпистемической логики, то $\mathcal{M}^{!\varphi} = (W', \{\sim'_i\}_{i \in \mathcal{A}'}, V')$ – обновленная модель относительно $!\varphi$, где

Публичное объявление

Если $\mathcal{M} = (W, \{\sim_i\}_{i \in \mathcal{A}}, V)$ – модель эпистемической логики, то $\mathcal{M}^{\dagger\varphi} = (W', \{\sim'_i\}_{i \in \mathcal{A}'}, V')$ – обновленная модель относительно $\dagger\varphi$, где

$$\blacktriangleright W' = [\varphi]_{\mathcal{M}} = \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models \varphi\}$$

Публичное объявление

Если $\mathcal{M} = (W, \{\sim_i\}_{i \in \mathcal{A}}, V)$ – модель эпистемической логики, то $\mathcal{M}^{\dagger\varphi} = (W', \{\sim'_i\}_{i \in \mathcal{A}'}, V')$ – обновленная модель относительно $\dagger\varphi$, где

- ▶ $W' = [\varphi]_{\mathcal{M}} = \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models \varphi\}$
- ▶ $\sim'_i = \sim_i \cap ([\varphi]_{\mathcal{M}} \times [\varphi]_{\mathcal{M}})$

Публичное объявление

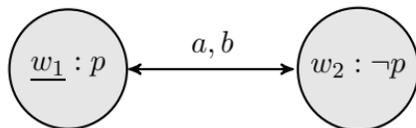
Если $\mathcal{M} = (W, \{\sim_i\}_{i \in \mathcal{A}}, V)$ – модель эпистемической логики, то $\mathcal{M}^{\dagger\varphi} = (W', \{\sim'_i\}_{i \in \mathcal{A}'}, V')$ – обновленная модель относительно $\dagger\varphi$, где

- ▶ $W' = [\varphi]_{\mathcal{M}} = \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models \varphi\}$
- ▶ $\sim'_i = \sim_i \cap ([\varphi]_{\mathcal{M}} \times [\varphi]_{\mathcal{M}})$
- ▶ $V'(p) = V(p) \cap [\varphi]_{\mathcal{M}}$

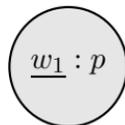
Публичное объявление

$M, w \models [!\varphi]\psi$ е.т.е. $M, w \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, w \models \psi$

Открытие конверта: \mathcal{M}

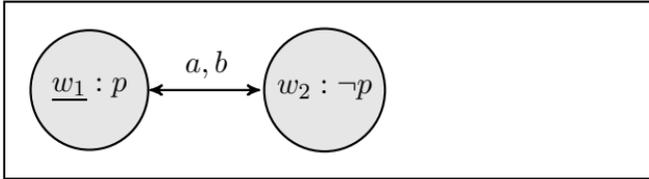


Открытие конверта: $\mathcal{M}^!p$



$\mathcal{M}, w \models [! \varphi] \psi$ е.т.е. $M, w \models \varphi \Rightarrow \mathcal{M}^{! \varphi}, w \models \psi$

\mathcal{M}



$\mathcal{M}^{!p}$



$\mathcal{M}, w_1 \models$

1. p
2. $\neg K_a p \wedge \neg K_b p$
3. $\neg K_a \neg p \wedge \neg K_b \neg p$
4. $\bigwedge_{i \in \{a, b\}} \neg K_i^? p$, где¹
5. $\mathcal{M} \models C_{ab} (\bigwedge_{i \in \{a, b\}} \neg K_i^? p)$
6. $\mathcal{M}^{!p}, w_1 \models K_a p \wedge K_b p$
7. $\mathcal{M}^{!p}, w_1 \models C_{ab} p$
8. $\mathcal{M}, w_1 \models [!p] (K_a p \wedge K_b p)$
9. $\mathcal{M}, w_1 \models [!p] C_{ab} p$

¹ $K_i^? \varphi := K_i \varphi \vee K_i \neg \varphi$

Карты

Всего в колоде три карты - '3', '7', 'Туз'. Анна, Борис и Семен вытаскивают по одной карте.

Карты

Всего в колоде три карты - '3', '7', 'Туз'. Анна, Борис и Семен вытаскивают по одной карте.
Анна: «У меня нет '7'»

Карты

Всего в колоде три карты - '3', '7', 'Туз'. Анна, Борис и Семен вытаскивают по одной карте.

Анна: «У меня нет '7'»

Семен: «Тогда, я знаю что у тебя 'Туз'».

Карты

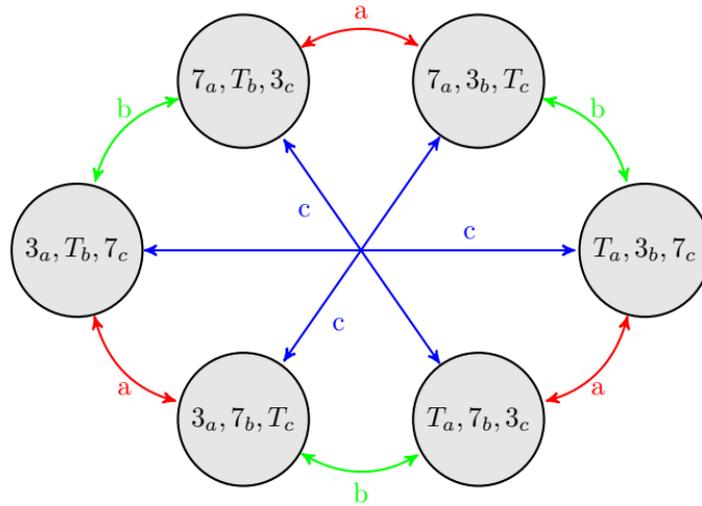
Всего в колоде три карты - '3', '7', 'Туз'. Анна, Борис и Семен вытаскивают по одной карте.

Анна: «У меня нет '7'»

Семен: «Тогда, я знаю что у тебя 'Туз'».

Какие у кого карты?

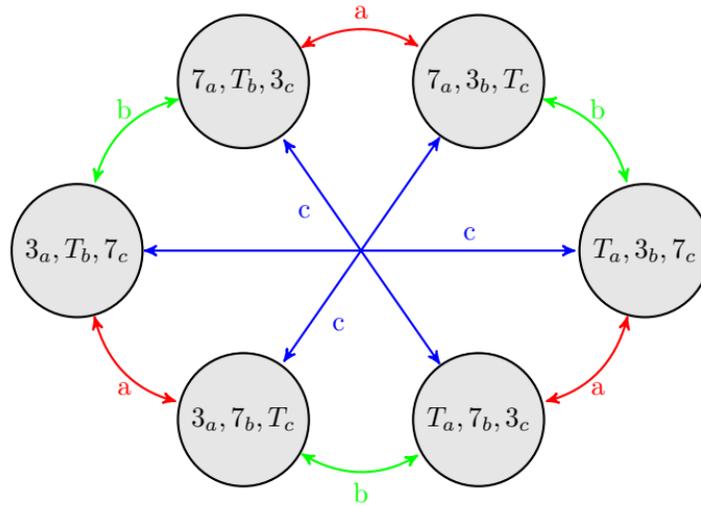
Карты



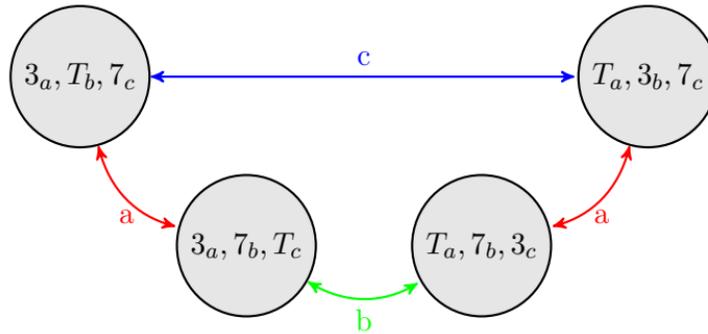
Анна: «У меня нет '7'»

$\mathcal{M}^{\neg 7_a}$

Обновление точной информации (hard update)

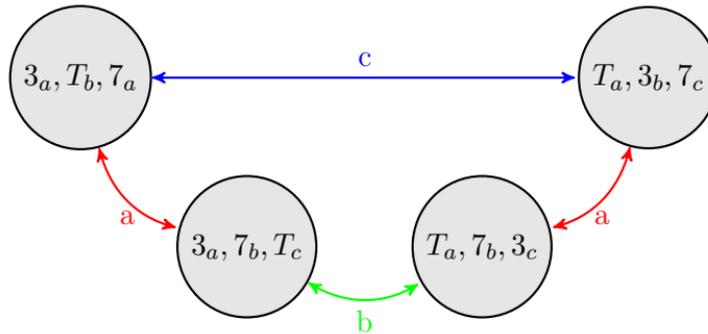


Обновление точной информации (hard update)

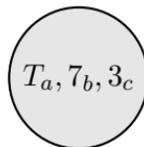


Семен: «Я знаю: у тебя 'Туз'»
($\mathcal{M}^{\neg 7_a}$)! $K_c T_a$

Обновление точной информации (hard update)



Обновление точной информации (hard update)


$$T_a, \tau_b, \beta_c$$

Обновление точной информации (hard update)

$$\mathcal{M}, w \models [!\varphi]\psi \text{ е.т.е. } \mathcal{M}, w \models \varphi \Rightarrow \mathcal{M}^{!\varphi}, w \models \psi$$

1. $\mathcal{M}, w \models [!\neg 7_a]K_c T_a$
2. $\mathcal{M}, w \models [!\neg 7_a][!K_c T_a]K_b(T_a \wedge 7_b \wedge 3_c)$
3. $\mathcal{M}, w \models [!\neg 7_a][!K_c T_a]E_{abc}(T_a \wedge 7_b \wedge 3_c)$
4. $\mathcal{M}, w \models [!\neg 7_a][!K_c T_a]C_{abc}(T_a \wedge 7_b \wedge 3_c)$

Всегда ли верно?

$[\!|\varphi]K_i\varphi$

Парадокс Мура

«Идет дождь, но я в это не верю» (или «не знаю»)

- ▶ Формула $p \wedge \neg K_i p$ не является противоречием

Парадокс Мура

«Идет дождь, но я в это не верю» (или «не знаю»)

- ▶ Формула $p \wedge \neg K_i p$ не является противоречием

Парадокс Мура

«Идет дождь, но я в это не верю» (или «не знаю»)

- ▶ Формула $p \wedge \neg K_i p$ не является противоречием
- ▶ «Пьеро любит Мальвину, но она об этом не знает»

Парадокс Мура

«Идет дождь, но я в это не верю» (или «не знаю»)

- ▶ Формула $p \wedge \neg K_i p$ не является противоречием
- ▶ «Пьеро любит Мальвину, но она об этом не знает»
- ▶ Эта формула является самопроверяемой, но в динамическом смысле

Парадокс Мура

«Идет дождь, но я в это не верю» (или «не знаю»)

- ▶ Формула $p \wedge \neg K_i p$ не является противоречием
- ▶ «Пьеро любит Мальвину, но она об этом не знает»
- ▶ Эта формула является самопроверяемой, но в динамическом смысле
- ▶ Эта формула не может быть содержанием успешного публичного объявления

Парадокс Мура

«Идет дождь, но я в это не верю» (или «не знаю»)

- ▶ Формула $p \wedge \neg K_i p$ не является противоречием
- ▶ «Пьеро любит Мальвину, но она об этом не знает»
- ▶ Эта формула является самопроверяемой, но в динамическом смысле
- ▶ Эта формула не может быть содержанием успешного публичного объявления
- ▶ $[(p \wedge \neg K_i p)] \neg (p \wedge \neg K_i p)$

Парадокс Мура

«Идет дождь, но я в это не верю» (или «не знаю»)

- ▶ Формула $p \wedge \neg K_i p$ не является противоречием
- ▶ «Пьеро любит Мальвину, но она об этом не знает»
- ▶ Эта формула является самопроверяемой, но в динамическом смысле
- ▶ Эта формула не может быть содержанием успешного публичного объявления
- ▶ $[(p \wedge \neg K_i p)] \neg (p \wedge \neg K_i p)$
- ▶ т.е., она имеет вид $[\!|\varphi]\neg\varphi$

Парадокс Мура

«Идет дождь, но я в это не верю» (или «не знаю»)

- ▶ Формула $p \wedge \neg K_i p$ не является противоречием
- ▶ «Пьеро любит Мальвину, но она об этом не знает»
- ▶ Эта формула является самопроверяемой, но в динамическом смысле
- ▶ Эта формула не может быть содержанием успешного публичного объявления
- ▶ $[(p \wedge \neg K_i p)] \neg (p \wedge \neg K_i p)$
- ▶ т.е., она имеет вид $[\!|\varphi]\neg\varphi$
- ▶ Предложение vs. высказывание

Всегда ли обновление ведет к успеху?

$$p \wedge B_a p \wedge [!q] B_a \neg p$$

$$p \wedge B_a p \wedge [!q] B_a \neg p$$

$$p \wedge B_a p \wedge [!q] B_a \neg p$$

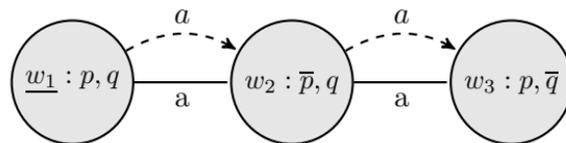
$$p \wedge B_a p \wedge [!q] B_a \neg p$$

$$p \wedge B_a p \wedge [!q] B_a \neg p$$

$$p \wedge B_a p \wedge [!q] B_a \neg p$$

$$p \wedge B_a p \wedge [!q] B_a \neg p$$

$$p \wedge B_a p \wedge [!q] B_a \neg p$$



Обновление точной информации (hard update)

Классические задачи

КЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

«Чумазые дети»

«Чумазые дети»

Аня, Борис и Семен вернулись с прогулки. Папа им говорит: хотя бы у одного из вас чумазый лоб. Сейчас я Вам буду задавать вопросы, тот, кто догадается чумазый он или нет – должен всем сказать, что он догадался (но не говорить какой он).

«Чумазые дети»

Аня, Борис и Семен вернулись с прогулки. Папа им говорит: хотя бы у одного из вас чумазый лоб. Сейчас я Вам буду задавать вопросы, тот, кто догадается чумазый он или нет – должен всем сказать, что он догадался (но не говорить какой он).

1 Папа: Кто-то из вас знает, чумазый он или нет ?

«Чумазые дети»

Аня, Борис и Семен вернулись с прогулки. Папа им говорит: хотя бы у одного из вас чумазый лоб. Сейчас я Вам буду задавать вопросы, тот, кто догадается чумазый он или нет – должен всем сказать, что он догадался (но не говорить какой он).

1 Папа: Кто-то из вас знает, чумазый он или нет ?

Дети: Нет!

«Чумазые дети»

Аня, Борис и Семен вернулись с прогулки. Папа им говорит: хотя бы у одного из вас чумазый лоб. Сейчас я Вам буду задавать вопросы, тот, кто догадается чумазый он или нет – должен всем сказать, что он догадался (но не говорить какой он).

1 Папа: Кто-то из вас знает, чумазый он или нет ?

Дети: Нет!

2 Папа: А теперь?

«Чумазые дети»

Аня, Борис и Семен вернулись с прогулки. Папа им говорит: хотя бы у одного из вас чумазый лоб. Сейчас я Вам буду задавать вопросы, тот, кто догадается чумазый он или нет – должен всем сказать, что он догадался (но не говорить какой он).

1 Папа: Кто-то из вас знает, чумазый он или нет ?

Дети: Нет!

2 Папа: А теперь?

Аня: Я знаю!

«Чумазые дети»

Аня, Борис и Семен вернулись с прогулки. Папа им говорит: хотя бы у одного из вас чумазый лоб. Сейчас я Вам буду задавать вопросы, тот, кто догадается чумазый он или нет – должен всем сказать, что он догадался (но не говорить какой он).

1 Папа: Кто-то из вас знает, чумазый он или нет ?

Дети: Нет!

2 Папа: А теперь?

Аня: Я знаю!

Борис: И я знаю!

«Чумазые дети»

Аня, Борис и Семен вернулись с прогулки. Папа им говорит: хотя бы у одного из вас чумазый лоб. Сейчас я Вам буду задавать вопросы, тот, кто догадается чумазый он или нет – должен всем сказать, что он догадался (но не говорить какой он).

1 Папа: Кто-то из вас знает, чумазый он или нет ?

Дети: Нет!

2 Папа: А теперь?

Аня: Я знаю!

Борис: И я знаю!

Семен: Ну тогда все понятно: я - . . . !

«Чумазые дети»

Аня, Борис и Семен вернулись с прогулки. Папа им говорит: хотя бы у одного из вас чумазый лоб. Сейчас я Вам буду задавать вопросы, тот, кто догадается чумазый он или нет – должен всем сказать, что он догадался (но не говорить какой он).

1 Папа: Кто-то из вас знает, чумазый он или нет ?

Дети: Нет!

2 Папа: А теперь?

Аня: Я знаю!

Борис: И я знаю!

Семен: Ну тогда все понятно: я - . . . !

Чумазый Семен или нет? А Борис и Аня? Как они догадались?

Обновление точной информации (hard update)

Классические задачи

Обновление точной информации (hard update)

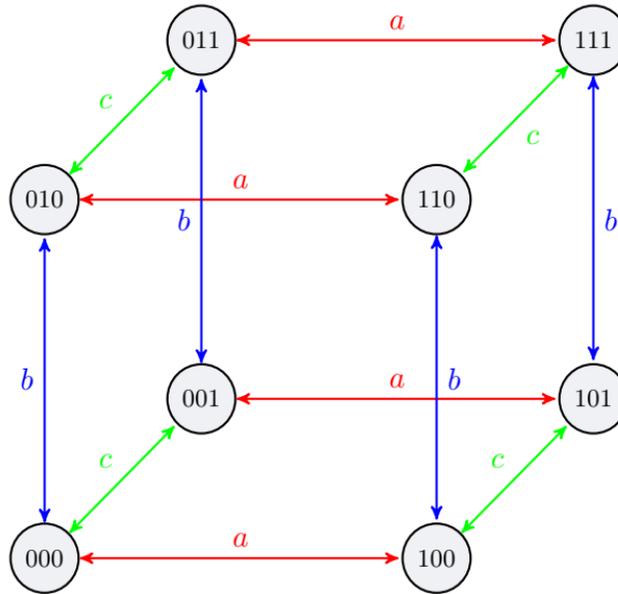
Классические задачи

Обновление точной информации (hard update)

Классические задачи

Обновление точной информации (hard update)

Классические задачи



Обновление точной информации (hard update)

Классические задачи

Папа: Хотя бы один из вас чумазый!

Обновление точной информации (hard update)

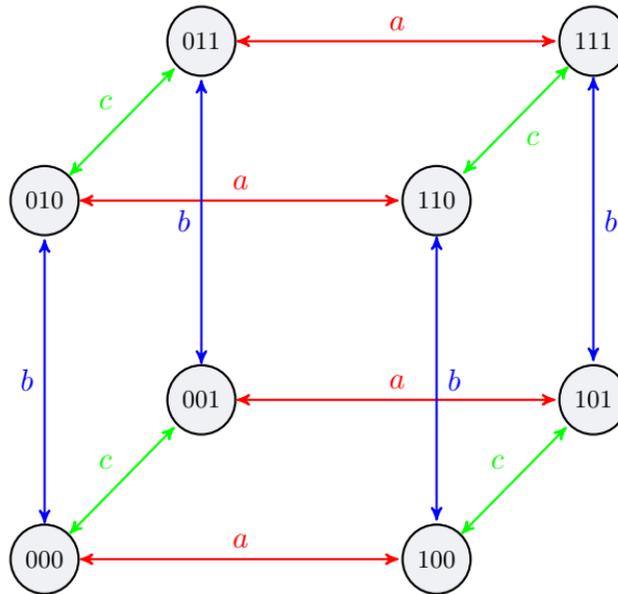
Классические задачи

Папа: Хотя бы один из вас чумазый!

$[!(p_a \vee p_b \vee p_c)]$

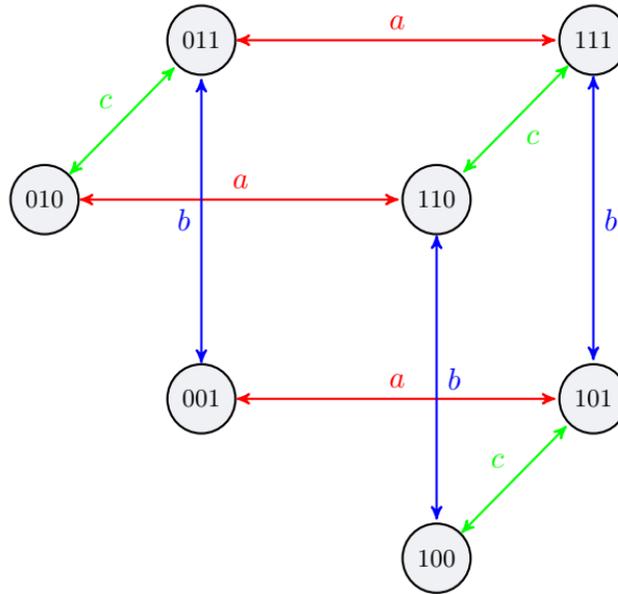
Обновление точной информации (hard update)

Классические задачи



Обновление точной информации (hard update)

Классические задачи



Обновление точной информации (hard update)

Классические задачи

Папа: Кто-то из вас знает, какой он?

Обновление точной информации (hard update)

Классические задачи

Папа: Кто-то из вас знает, какой он?

Дети: Нет!

Обновление точной информации (hard update)

Классические задачи

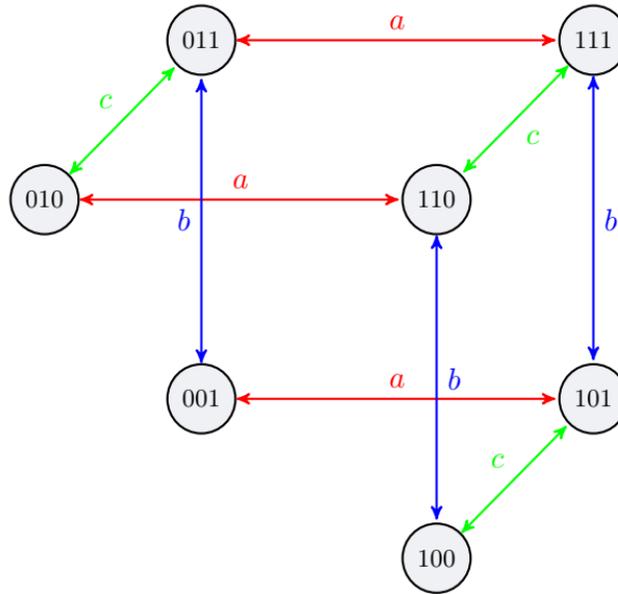
Папа: Кто-то из вас знает, какой он?

Дети: Нет!

$[!(p_a \vee p_b \vee p_c)][!(\neg K_a^? p_a \wedge \neg K_b^? p_b \wedge \neg K_c^? p_c)]$

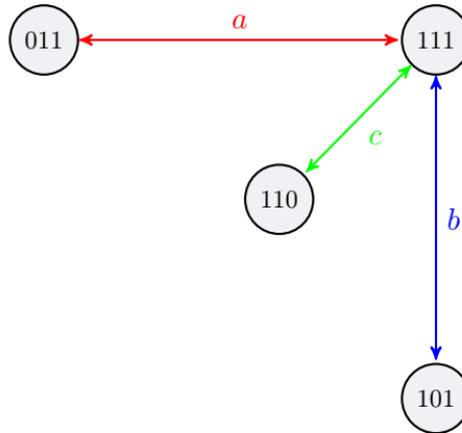
Обновление точной информации (hard update)

Классические задачи



Обновление точной информации (hard update)

Классические задачи



Обновление точной информации (hard update)

Классические задачи

Папа: А теперь?

Обновление точной информации (hard update)

Классические задачи

Папа: А теперь?

Аня: Я знаю!

Обновление точной информации (hard update)

Классические задачи

Папа: А теперь?

Аня: Я знаю!

Борис: И я знаю!

Обновление точной информации (hard update)

Классические задачи

Папа: А теперь?

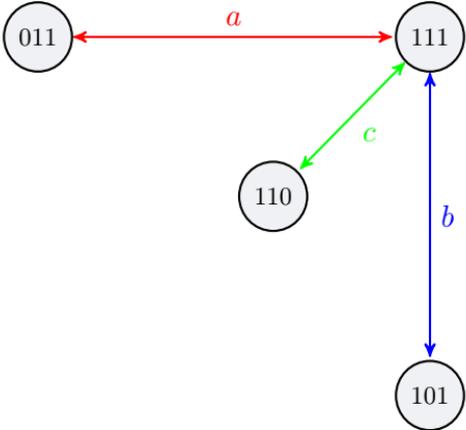
Аня: Я знаю!

Борис: И я знаю!

$[!(p_a \vee p_b \vee p_c)][!(\neg K_a^? p_a \wedge \neg K_b^? p_b \wedge \neg K_c^? p_c)][!(K_a^? p_a \wedge K_b^? p_b)]$

Обновление точной информации (hard update)

Классические задачи



Обновление точной информации (hard update)

Классические задачи



Обновление точной информации (hard update)

Классические задачи

Если считать действительным миром w_{110} , то

$$\mathcal{M}, w_{110} \models [!(p_a \vee p_b \vee p_c)][!(\neg K_a^? p_a \wedge \neg K_b^? p_b \wedge \neg K_c^? p_c)][!(K_a^? p_a \wedge K_b^? p_b)](p_a \wedge p_b \wedge \neg p_c)$$

«День Рождения Шерил»

«День Рождения Шерил»

Альберт и Бернард только что познакомились с Шерил, и захотели узнать, когда у нее день рождения. Шерил перечислила список из 10 возможных дат: 15 мая, 16 мая, 19 мая, 17 июня, 18 июня, 14 июля, 16 июля, 14 августа, 15 августа и 17 августа.

Потом Шерил сказала Бернарду только день ее рождения, а Альберту — месяц.

«День Рождения Шерил»

Альберт и Бернард только что познакомились с Шерил, и захотели узнать, когда у нее день рождения. Шерил перечислила список из 10 возможных дат: 15 мая, 16 мая, 19 мая, 17 июня, 18 июня, 14 июля, 16 июля, 14 августа, 15 августа и 17 августа.

Потом Шерил сказала Бернарду только день ее рождения, а Альберту — месяц.

«Я не знаю, когда у Шерил день рождения, но я точно знаю, что Бернард тоже не знает», — сказал Альберт.

«День Рождения Шерил»

Альберт и Бернард только что познакомились с Шерил, и захотели узнать, когда у нее день рождения. Шерил перечислила список из 10 возможных дат: 15 мая, 16 мая, 19 мая, 17 июня, 18 июня, 14 июля, 16 июля, 14 августа, 15 августа и 17 августа.

Потом Шерил сказала Бернарду только день ее рождения, а Альберту — месяц.

«Я не знаю, когда у Шерил день рождения, но я точно знаю, что Бернард тоже не знает», — сказал Альберт.

«Сначала я не знал, когда у Шерил день рождения, но теперь я знаю», — возразил Бернард.

«День Рождения Шерил»

Альберт и Бернард только что познакомились с Шерил, и захотели узнать, когда у нее день рождения. Шерил перечислила список из 10 возможных дат: 15 мая, 16 мая, 19 мая, 17 июня, 18 июня, 14 июля, 16 июля, 14 августа, 15 августа и 17 августа.

Потом Шерил сказала Бернарду только день ее рождения, а Альберту — месяц.

«Я не знаю, когда у Шерил день рождения, но я точно знаю, что Бернард тоже не знает», — сказал Альберт.

«Сначала я не знал, когда у Шерил день рождения, но теперь я знаю», — возразил Бернард.

На это Альберт ответил: «Тогда я тоже знаю, когда у Шерил День рождения».

«День Рождения Шерил»

Альберт и Бернард только что познакомились с Шерил, и захотели узнать, когда у нее день рождения. Шерил перечислила список из 10 возможных дат: 15 мая, 16 мая, 19 мая, 17 июня, 18 июня, 14 июля, 16 июля, 14 августа, 15 августа и 17 августа.

Потом Шерил сказала Бернарду только день ее рождения, а Альберту — месяц.

«Я не знаю, когда у Шерил день рождения, но я точно знаю, что Бернард тоже не знает», — сказал Альберт.

«Сначала я не знал, когда у Шерил день рождения, но теперь я знаю», — возразил Бернард.

На это Альберт ответил: «Тогда я тоже знаю, когда у Шерил День рождения».

Когда же у Шерил день рождения?

Обновление точной информации (hard update)

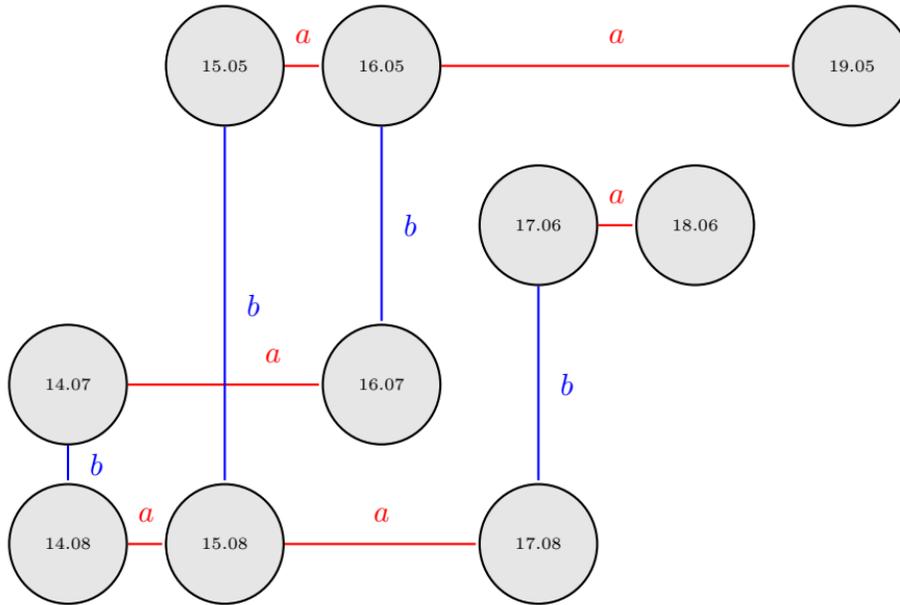
Классические задачи

Обновление точной информации (hard update)

Классические задачи

Обновление точной информации (hard update)

Классические задачи



Обновление точной информации (hard update)

Классические задачи

Альберт: "Я не знаю, когда у Шерил день рождения, но я точно знаю, что Бернард тоже не знает"

Обновление точной информации (hard update)

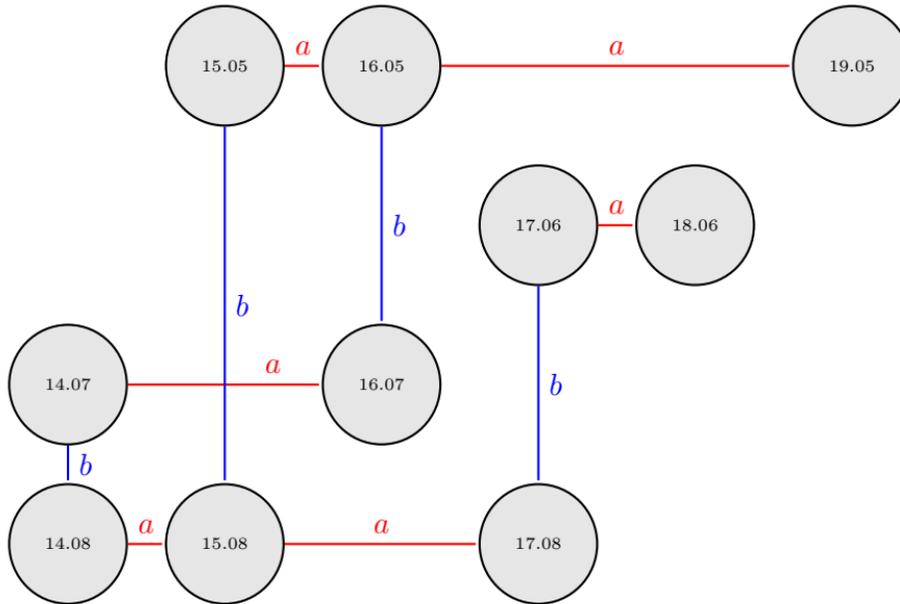
Классические задачи

Альберт: "Я не знаю, когда у Шерил день рождения, но я точно знаю, что Бернард тоже не знает"

$$[!(\neg K_a \varphi \wedge K_a \neg K_b \varphi)]$$

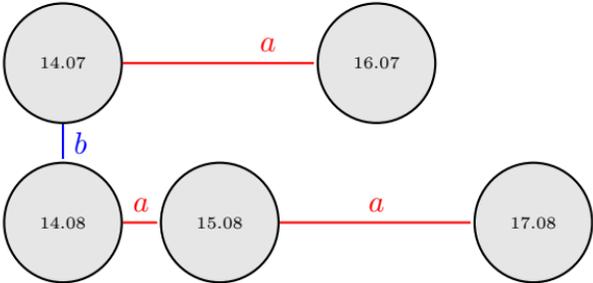
Обновление точной информации (hard update)

Классические задачи



Обновление точной информации (hard update)

Классические задачи



Обновление точной информации (hard update)

Классические задачи

Бернард: "Сначала я не знал, когда у Шерил день рождения, но теперь я знаю"

Обновление точной информации (hard update)

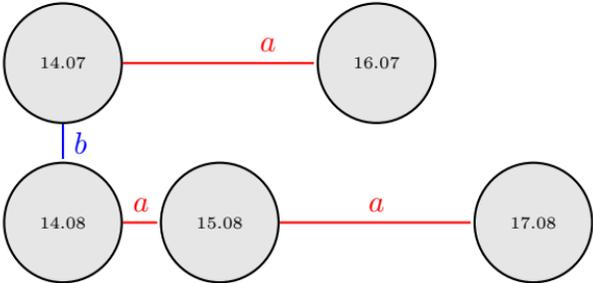
Классические задачи

Бернард: "Сначала я не знал, когда у Шерил день рождения, но теперь я знаю"

$[!(\neg K_a \varphi \wedge K_a \neg K_b \varphi)][!K_b \varphi]$

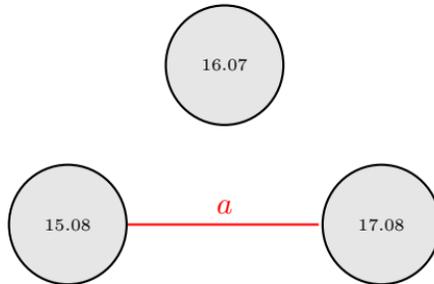
Обновление точной информации (hard update)

Классические задачи



Обновление точной информации (hard update)

Классические задачи



Обновление точной информации (hard update)

Классические задачи

Альберт: "Тогда я тоже знаю, когда у Шерил день рождения"

Обновление точной информации (hard update)

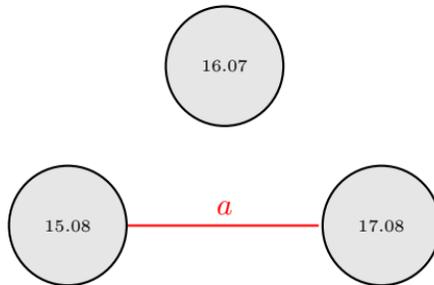
Классические задачи

Альберт: "Тогда я тоже знаю, когда у Шерил день рождения"

$[!(\neg K_a \varphi \wedge K_a \neg K_b \varphi)][!K_b \varphi][!K_a \varphi]$

Обновление точной информации (hard update)

Классические задачи



Обновление точной информации (hard update)

Классические задачи



Формализация решения

Формализация решения

$\mathcal{M} = (\mathcal{A}, W, \{\sim_i\}_{i \in \mathcal{A}}, V)$, где

Формализация решения

$\mathcal{M} = (\mathcal{A}, W, \{\sim_i\}_{i \in \mathcal{A}}, V)$, где

▶ $\mathcal{A} = \{a, b\}$

Формализация решения

$\mathcal{M} = (\mathcal{A}, W, \{\sim_i\}_{i \in \mathcal{A}}, V)$, где

▶ $\mathcal{A} = \{a, b\}$

▶ $W = \{w_{05}^{15}, w_{05}^{16}, w_{05}^{19}, w_{06}^{17}, w_{06}^{18}, w_{07}^{14}, w_{07}^{16}, w_{08}^{14}, w_{08}^{15}, w_{08}^{17}\}$

Формализация решения

$\mathcal{M} = (\mathcal{A}, W, \{\sim_i\}_{i \in \mathcal{A}}, V)$, где

- ▶ $\mathcal{A} = \{a, b\}$
- ▶ $W = \{w_{05}^{15}, w_{05}^{16}, w_{05}^{19}, w_{06}^{17}, w_{06}^{18}, w_{07}^{14}, w_{07}^{16}, w_{08}^{14}, w_{08}^{15}, w_{08}^{17}\}$
- ▶ $\sim_a = \{(w_y^x, w_{y'}^{x'}) \mid w_y^x, w_{y'}^{x'} \in W, y = y'\}$

Формализация решения

$\mathcal{M} = (\mathcal{A}, W, \{\sim_i\}_{i \in \mathcal{A}}, V)$, где

- ▶ $\mathcal{A} = \{a, b\}$
- ▶ $W = \{w_{05}^{15}, w_{05}^{16}, w_{05}^{19}, w_{06}^{17}, w_{06}^{18}, w_{07}^{14}, w_{07}^{16}, w_{08}^{14}, w_{08}^{15}, w_{08}^{17}\}$
- ▶ $\sim_a = \{(w_y^x, w_{y'}^{x'}) \mid w_y^x, w_{y'}^{x'} \in W, y = y'\}$
- ▶ $\sim_b = \{(w_y^x, w_{y'}^{x'}) \mid w_y^x, w_{y'}^{x'} \in W, x = x'\}$

Формализация решения

$\mathcal{M} = (\mathcal{A}, W, \{\sim_i\}_{i \in \mathcal{A}}, V)$, где

- ▶ $\mathcal{A} = \{a, b\}$
- ▶ $W = \{w_{05}^{15}, w_{05}^{16}, w_{05}^{19}, w_{06}^{17}, w_{06}^{18}, w_{07}^{14}, w_{07}^{16}, w_{08}^{14}, w_{08}^{15}, w_{08}^{17}\}$
- ▶ $\sim_a = \{(w_y^x, w_{y'}^{x'}) \mid w_y^x, w_{y'}^{x'} \in W, y = y'\}$
- ▶ $\sim_b = \{(w_y^x, w_{y'}^{x'}) \mid w_y^x, w_{y'}^{x'} \in W, x = x'\}$
- ▶ $V(d^x) = \{w_y^{x'} \in W \mid x = x'\}$

Формализация решения

$\mathcal{M} = (\mathcal{A}, W, \{\sim_i\}_{i \in \mathcal{A}}, V)$, где

- ▶ $\mathcal{A} = \{a, b\}$
- ▶ $W = \{w_{05}^{15}, w_{05}^{16}, w_{05}^{19}, w_{06}^{17}, w_{06}^{18}, w_{07}^{14}, w_{07}^{16}, w_{08}^{14}, w_{08}^{15}, w_{08}^{17}\}$
- ▶ $\sim_a = \{(w_y^x, w_{y'}^{x'}) \mid w_y^x, w_{y'}^{x'} \in W, y = y'\}$
- ▶ $\sim_b = \{(w_y^x, w_{y'}^{x'}) \mid w_y^x, w_{y'}^{x'} \in W, x = x'\}$
- ▶ $V(d^x) = \{w_y^{x'} \in W \mid x = x'\}$
- ▶ $V(m^y) = \{w_{y'}^x \in W \mid y = y'\}$

Формализация решения

$\mathcal{M} = (\mathcal{A}, W, \{\sim_i\}_{i \in \mathcal{A}}, V)$, где

- ▶ $\mathcal{A} = \{a, b\}$
- ▶ $W = \{w_{05}^{15}, w_{05}^{16}, w_{05}^{19}, w_{06}^{17}, w_{06}^{18}, w_{07}^{14}, w_{07}^{16}, w_{08}^{14}, w_{08}^{15}, w_{08}^{17}\}$
- ▶ $\sim_a = \{(w_y^x, w_{y'}^{x'}) \mid w_y^x, w_{y'}^{x'} \in W, y = y'\}$
- ▶ $\sim_b = \{(w_y^x, w_{y'}^{x'}) \mid w_y^x, w_{y'}^{x'} \in W, x = x'\}$
- ▶ $V(d^x) = \{w_y^{x'} \in W \mid x = x'\}$
- ▶ $V(m^y) = \{w_{y'}^x \in W \mid y = y'\}$

Формализация решения

$\mathcal{M} = (\mathcal{A}, W, \{\sim_i\}_{i \in \mathcal{A}}, V)$, где

- ▶ $\mathcal{A} = \{a, b\}$
- ▶ $W = \{w_{05}^{15}, w_{05}^{16}, w_{05}^{19}, w_{06}^{17}, w_{06}^{18}, w_{07}^{14}, w_{07}^{16}, w_{08}^{14}, w_{08}^{15}, w_{08}^{17}\}$
- ▶ $\sim_a = \{(w_y^x, w_{y'}^{x'}) \mid w_y^x, w_{y'}^{x'} \in W, y = y'\}$
- ▶ $\sim_b = \{(w_y^x, w_{y'}^{x'}) \mid w_y^x, w_{y'}^{x'} \in W, x = x'\}$
- ▶ $V(d^x) = \{w_y^{x'} \in W \mid x = x'\}$
- ▶ $V(m^y) = \{w_y^{x'} \in W \mid y = y'\}$

$\mathcal{M}, w_y^x \models [!(\neg K_a \varphi \wedge K_a \neg K_b \varphi)][!K_b \varphi][!K_a \varphi] \varphi$, где

Формализация решения

$\mathcal{M} = (\mathcal{A}, W, \{\sim_i\}_{i \in \mathcal{A}}, V)$, где

- ▶ $\mathcal{A} = \{a, b\}$
- ▶ $W = \{w_{05}^{15}, w_{05}^{16}, w_{05}^{19}, w_{06}^{17}, w_{06}^{18}, w_{07}^{14}, w_{07}^{16}, w_{08}^{14}, w_{08}^{15}, w_{08}^{17}\}$
- ▶ $\sim_a = \{(w_y^x, w_{y'}^{x'}) \mid w_y^x, w_{y'}^{x'} \in W, y = y'\}$
- ▶ $\sim_b = \{(w_y^x, w_{y'}^{x'}) \mid w_y^x, w_{y'}^{x'} \in W, x = x'\}$
- ▶ $V(d^x) = \{w_y^{x'} \in W \mid x = x'\}$
- ▶ $V(m^y) = \{w_y^x \in W \mid y = y'\}$

$\mathcal{M}, w_y^x \models [!(\neg K_a \varphi \wedge K_a \neg K_b \varphi)][!K_b \varphi][!K_a \varphi] \varphi$, где

- ▶ $\varphi \Leftrightarrow d^x \wedge m^y$

Формализация решения

$\mathcal{M} = (\mathcal{A}, W, \{\sim_i\}_{i \in \mathcal{A}}, V)$, где

- ▶ $\mathcal{A} = \{a, b\}$
- ▶ $W = \{w_{05}^{15}, w_{05}^{16}, w_{05}^{19}, w_{06}^{17}, w_{06}^{18}, w_{07}^{14}, w_{07}^{16}, w_{08}^{14}, w_{08}^{15}, w_{08}^{17}\}$
- ▶ $\sim_a = \{(w_y^x, w_{y'}^{x'}) \mid w_y^x, w_{y'}^{x'} \in W, y = y'\}$
- ▶ $\sim_b = \{(w_y^x, w_{y'}^{x'}) \mid w_y^x, w_{y'}^{x'} \in W, x = x'\}$
- ▶ $V(d^x) = \{w_y^{x'} \in W \mid x = x'\}$
- ▶ $V(m^y) = \{w_y^x \in W \mid y = y'\}$

$\mathcal{M}, w_y^x \models [!(\neg K_a \varphi \wedge K_a \neg K_b \varphi)][!K_b \varphi][!K_a \varphi] \varphi$, где

- ▶ $\varphi \Leftrightarrow d^x \wedge m^y$
- ▶ d^x – сегодня x -е число

Формализация решения

$\mathcal{M} = (\mathcal{A}, W, \{\sim_i\}_{i \in \mathcal{A}}, V)$, где

- ▶ $\mathcal{A} = \{a, b\}$
- ▶ $W = \{w_{05}^{15}, w_{05}^{16}, w_{05}^{19}, w_{06}^{17}, w_{06}^{18}, w_{07}^{14}, w_{07}^{16}, w_{08}^{14}, w_{08}^{15}, w_{08}^{17}\}$
- ▶ $\sim_a = \{(w_y^x, w_{y'}^{x'}) \mid w_y^x, w_{y'}^{x'} \in W, y = y'\}$
- ▶ $\sim_b = \{(w_y^x, w_{y'}^{x'}) \mid w_y^x, w_{y'}^{x'} \in W, x = x'\}$
- ▶ $V(d^x) = \{w_{y'}^{x'} \in W \mid x = x'\}$
- ▶ $V(m^y) = \{w_y^x \in W \mid y = y'\}$

$\mathcal{M}, w_y^x \models [!(\neg K_a \varphi \wedge K_a \neg K_b \varphi)][!K_b \varphi][!K_a \varphi] \varphi$, где

- ▶ $\varphi \Leftrightarrow d^x \wedge m^y$
- ▶ d^x – сегодня x -е число
- ▶ m^y – сейчас месяц y

Обновление точной информации (hard update)

Классические задачи

(C) The New Yorker

Обновление неточной информации

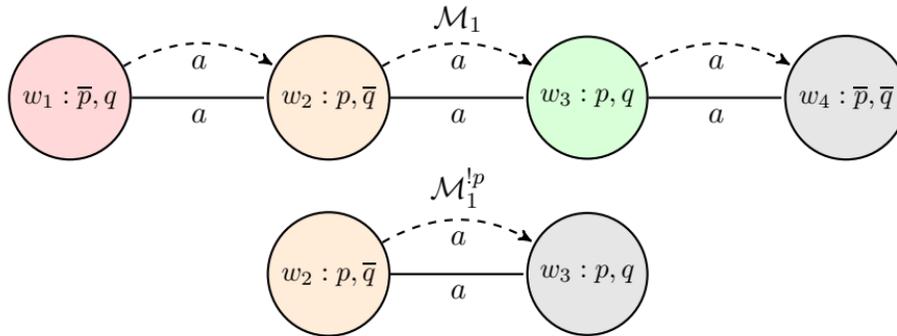
ОБНОВЛЕНИЕ НЕТОЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Идея

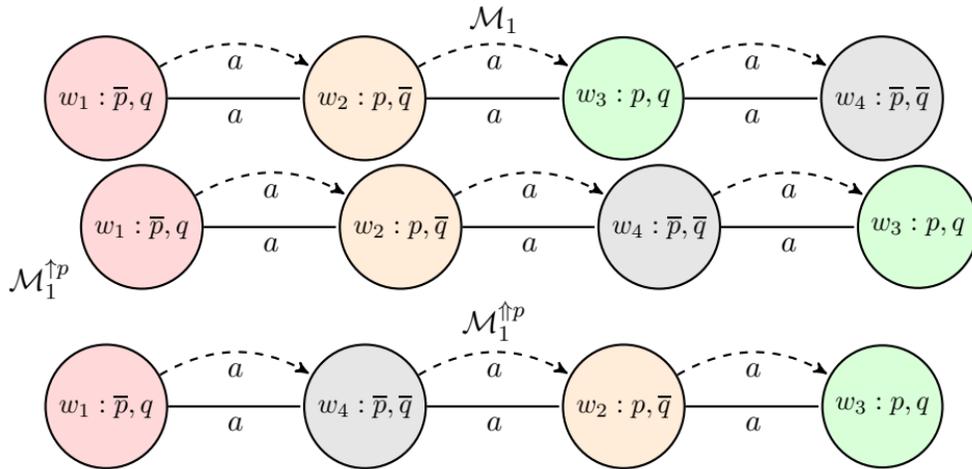
Три степени достоверности сообщения:

- ▶ $! \varphi$ – «публичное объявление»
сообщение из очень надёжного источника
- ▶ $\uparrow \varphi$ – «консервативное обновление»
сообщение из достаточно надёжного источника: минимальные изменение первоначального мнения
- ▶ $\uparrow\uparrow \varphi$ – «радикальное обновление»
сообщение из достаточно надёжного источника: радикальное изменение первоначального мнения

Публичное объявление: меняет точную информацию



Консервативное обновление vs. радикальное обновление



Некоторые определения:

Некоторые определения:

► $[\varphi]_{\mathcal{M}} = \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models \varphi\}$

Некоторые определения:

- ▶ $[\varphi]_{\mathcal{M}} = \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models \varphi\}$
- ▶ $[w]_i = \{w' \in W \mid w \sim_i w'\}$

Некоторые определения:

- ▶ $[\varphi]_{\mathcal{M}} = \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models \varphi\}$
- ▶ $[w]_i = \{w' \in W \mid w \sim_i w'\}$
- ▶ $[[\varphi]]_i^w = [\varphi]_{\mathcal{M}} \cap [w]_i$

Некоторые определения:

- ▶ $[\varphi]_{\mathcal{M}} = \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models \varphi\}$
- ▶ $[w]_i = \{w' \in W \mid w \sim_i w'\}$
- ▶ $[[\varphi]]_i^w = [\varphi]_{\mathcal{M}} \cap [w]_i$
- ▶ $best_i(\varphi, w) = \max_{\preceq_i} ([[\varphi]]_i^w)$

Некоторые определения:

- ▶ $[\varphi]_{\mathcal{M}} = \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models \varphi\}$
- ▶ $[w]_i = \{w' \in W \mid w \sim_i w'\}$
- ▶ $[[\varphi]]_i^w = [\varphi]_{\mathcal{M}} \cap [w]_i$
- ▶ $best_i(\varphi, w) = \max_{\preceq_i} ([[\varphi]]_i^w)$

Обновление неточной информации

Консервативное обновление

КОНСЕРВАТИВНОЕ ОБНОВЛЕНИЕ

Мягкое обновление-1(консервативное)

Если $\mathcal{M} = (W, \{\sim_i\}_{i \in \mathcal{A}}, \{\preceq_i\}_{i \in \mathcal{A}}, V)$

– модель докстической логики, то $\mathcal{M}^{\uparrow\varphi} = (\mathcal{A}', W', \{\sim'_i\}_{i \in \mathcal{A}'}, \{\preceq_i^{\uparrow\varphi}\}_{i \in \mathcal{A}'}, V')$ – модель консервативного информационного обновления, где

Мягкое обновление-1(консервативное)

Если $\mathcal{M} = (W, \{\sim_i\}_{i \in \mathcal{A}}, \{\preceq_i\}_{i \in \mathcal{A}}, V)$

– модель докстической логики, то $\mathcal{M}^{\uparrow\varphi} = (\mathcal{A}', W', \{\sim'_i\}_{i \in \mathcal{A}'}, \{\preceq_i^{\uparrow\varphi}\}_{i \in \mathcal{A}'}, V')$ – модель консервативного информационного обновления, где

$\mathcal{A}' = \mathcal{A}$, $W' = W$, $\sim'_i = \sim_i$, $V' = V$,

$\preceq_i^{\uparrow\varphi}$ – минимальное отношение, которое удовлетворяет условиям:

Мягкое обновление-1(консервативное)

Если $\mathcal{M} = (W, \{\sim_i\}_{i \in \mathcal{A}}, \{\preceq_i\}_{i \in \mathcal{A}}, V)$

– модель докстической логики, то $\mathcal{M}^{\uparrow\varphi} = (\mathcal{A}', W', \{\sim'_i\}_{i \in \mathcal{A}'}, \{\preceq_i^{\uparrow\varphi}\}_{i \in \mathcal{A}'}, V')$ – модель консервативного информационного обновления, где

$\mathcal{A}' = \mathcal{A}$, $W' = W$, $\sim'_i = \sim_i$, $V' = V$,

$\preceq_i^{\uparrow\varphi}$ – минимальное отношение, которое удовлетворяет условиям:

$$\blacktriangleright \forall x \forall y ((x \in \text{best}_i(\varphi, w) \wedge y \in [w]_i) \rightarrow y \prec_i^{\uparrow\varphi} x)$$

Мягкое обновление-1(консервативное)

Если $\mathcal{M} = (W, \{\sim_i\}_{i \in \mathcal{A}}, \{\preceq_i\}_{i \in \mathcal{A}}, V)$

– модель докстической логики, то $\mathcal{M}^{\uparrow\varphi} = (\mathcal{A}', W', \{\sim'_i\}_{i \in \mathcal{A}'}, \{\preceq_i^{\uparrow\varphi}\}_{i \in \mathcal{A}'}, V')$ – модель консервативного информационного обновления, где

$\mathcal{A}' = \mathcal{A}$, $W' = W$, $\sim'_i = \sim_i$, $V' = V$,

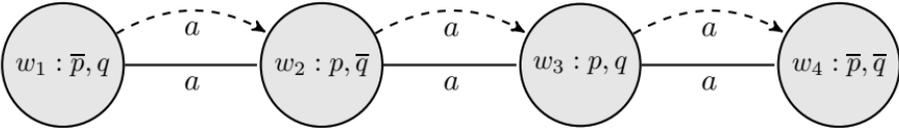
$\preceq_i^{\uparrow\varphi}$ – минимальное отношение, которое удовлетворяет условиям:

- ▶ $\forall x \forall y ((x \in best_i(\varphi, w) \wedge y \in [w]_i) \rightarrow y \prec_i^{\uparrow\varphi} x)$
- ▶ $\forall x \forall y ((x, y \in [w]_i - best_i(\varphi, w) \wedge x \preceq_i y) \rightarrow x \preceq_i^{\uparrow\varphi} y)$

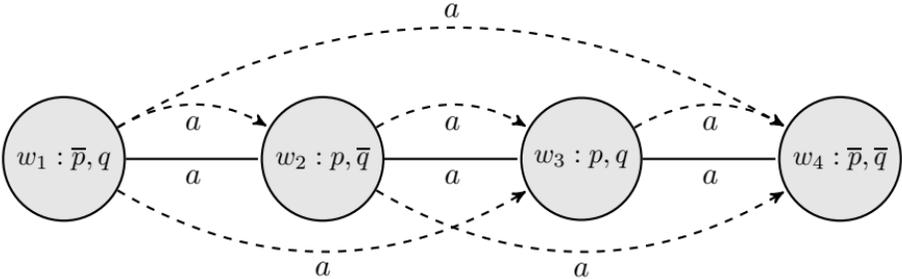
Консервативное обновление

$$\mathcal{M}, w \models [\uparrow \varphi] \psi \text{ е.т.е. } \mathcal{M}^{\uparrow \varphi}, w \models \psi$$

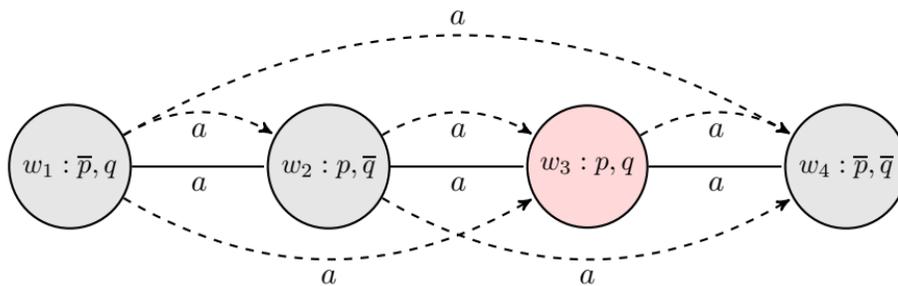
Пример: \mathcal{M}_1



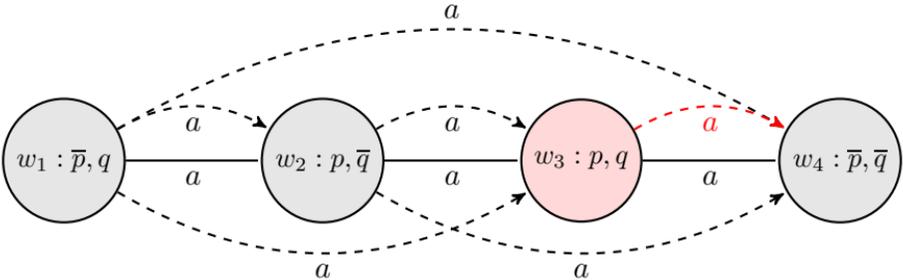
Пример: \mathcal{M}_1



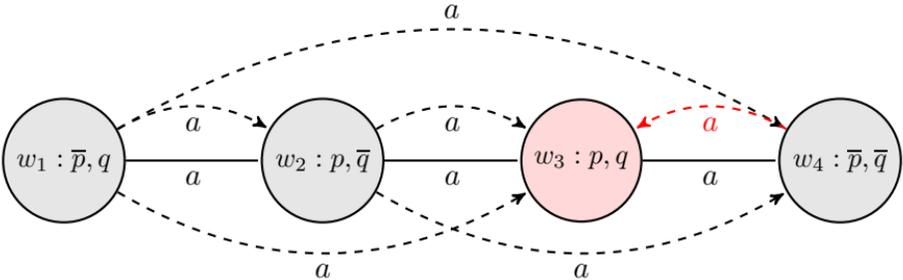
Пример: $\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_1^{\uparrow p}$



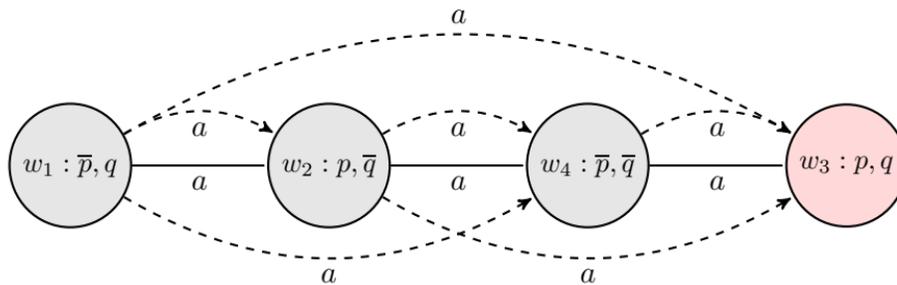
Пример: $\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_1^{\uparrow p}$



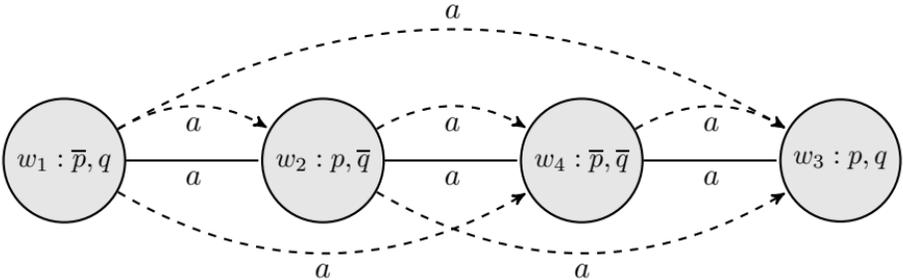
Пример: $\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_1^{\uparrow p}$



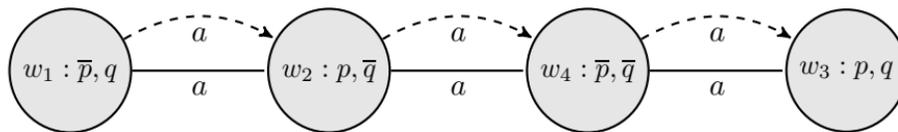
Пример: $\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_1^{\uparrow p}$



Пример: $\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_1^{\uparrow p}$



Пример: $\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_1^{\uparrow p}$



Обновление неточной информации

Радикальное обновление

РАДИКАЛЬНОЕ ОБНОВЛЕНИЕ

Мягкое обновление-2(радикальное)

Если $\mathcal{M} = (W, \{\sim_i\}_{i \in \mathcal{A}}, \{\preceq_i\}_{i \in \mathcal{A}}, V)$

– модель докстаической логики, то $\mathcal{M}^{\uparrow\varphi} = (W', \{\sim'_i\}_{i \in \mathcal{A}'}, \{\preceq_i^{\uparrow\varphi}\}_{i \in \mathcal{A}'}, V')$ – модель радикального обновления, где

Мягкое обновление-2(радикальное)

Если $\mathcal{M} = (W, \{\sim_i\}_{i \in \mathcal{A}}, \{\preceq_i\}_{i \in \mathcal{A}}, V)$

– модель докстаической логики, то $\mathcal{M}^{\uparrow\varphi} = (W', \{\sim'_i\}_{i \in \mathcal{A}'}, \{\preceq_i^{\uparrow\varphi}\}_{i \in \mathcal{A}'}, V')$ – модель радикального обновления, где

$\mathcal{A}' = \mathcal{A}$, $W' = W$, $\sim'_i = \sim_i$, $V' = V$,

$\preceq_i^{\uparrow\varphi}$ – минимальное отношение, которое удовлетворяет следующим условиям:

Мягкое обновление-2(радикальное)

Если $\mathcal{M} = (W, \{\sim_i\}_{i \in \mathcal{A}}, \{\preceq_i\}_{i \in \mathcal{A}}, V)$

– модель докстической логики, то $\mathcal{M}^{\uparrow\varphi} = (W', \{\sim'_i\}_{i \in \mathcal{A}'}, \{\preceq_i^{\uparrow\varphi}\}_{i \in \mathcal{A}'}, V')$ – модель радикального обновления, где

$\mathcal{A}' = \mathcal{A}$, $W' = W$, $\sim'_i = \sim_i$, $V' = V$,

$\preceq_i^{\uparrow\varphi}$ – минимальное отношение, которое удовлетворяет следующим условиям:

$$\blacktriangleright \forall x \forall y ((x \in [[\varphi]]_i^w \wedge y \in [[\neg\varphi]]_i^w) \rightarrow y \prec_i^{\uparrow\varphi} x)$$

Мягкое обновление-2(радикальное)

Если $\mathcal{M} = (W, \{\sim_i\}_{i \in \mathcal{A}}, \{\preceq_i\}_{i \in \mathcal{A}}, V)$

– модель докстатической логики, то $\mathcal{M}^{\uparrow\varphi} = (W', \{\sim'_i\}_{i \in \mathcal{A}'}, \{\preceq_i^{\uparrow\varphi}\}_{i \in \mathcal{A}'}, V')$ – модель радикального обновления, где

$\mathcal{A}' = \mathcal{A}$, $W' = W$, $\sim'_i = \sim_i$, $V' = V$,

$\preceq_i^{\uparrow\varphi}$ – минимальное отношение, которое удовлетворяет следующим условиям:

- ▶ $\forall x \forall y ((x \in [[\varphi]]_i^w \wedge y \in [[\neg\varphi]]_i^w) \rightarrow y \prec_i^{\uparrow\varphi} x)$
- ▶ $\forall x \forall y ((x, y \in [[\varphi]]_i^w \wedge x \preceq_i y) \rightarrow x \preceq_i^{\uparrow\varphi} y)$

Мягкое обновление-2(радикальное)

Если $\mathcal{M} = (W, \{\sim_i\}_{i \in \mathcal{A}}, \{\preceq_i\}_{i \in \mathcal{A}}, V)$

– модель докстатической логики, то $\mathcal{M}^{\uparrow\varphi} = (W', \{\sim'_i\}_{i \in \mathcal{A}'}, \{\preceq_i^{\uparrow\varphi}\}_{i \in \mathcal{A}'}, V')$ – модель радикального обновления, где

$\mathcal{A}' = \mathcal{A}$, $W' = W$, $\sim'_i = \sim_i$, $V' = V$,

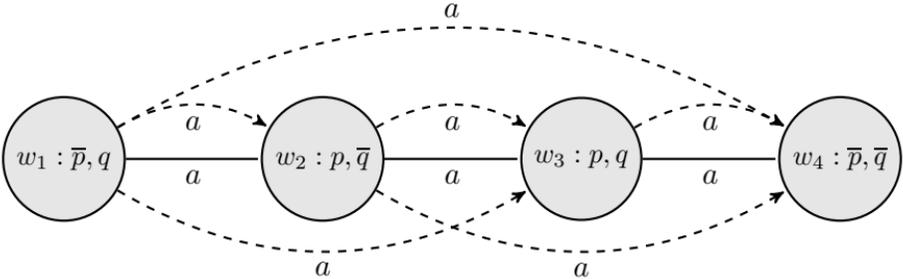
$\preceq_i^{\uparrow\varphi}$ – минимальное отношение, которое удовлетворяет следующим условиям:

- ▶ $\forall x \forall y ((x \in [[\varphi]]_i^w \wedge y \in [[\neg\varphi]]_i^w) \rightarrow y \prec_i^{\uparrow\varphi} x)$
- ▶ $\forall x \forall y ((x, y \in [[\varphi]]_i^w \wedge x \preceq_i y) \rightarrow x \preceq_i^{\uparrow\varphi} y)$
- ▶ $\forall x \forall y ((x, y \in [[\neg\varphi]]_i^w \wedge x \preceq_i y) \rightarrow x \preceq_i^{\uparrow\varphi} y)$

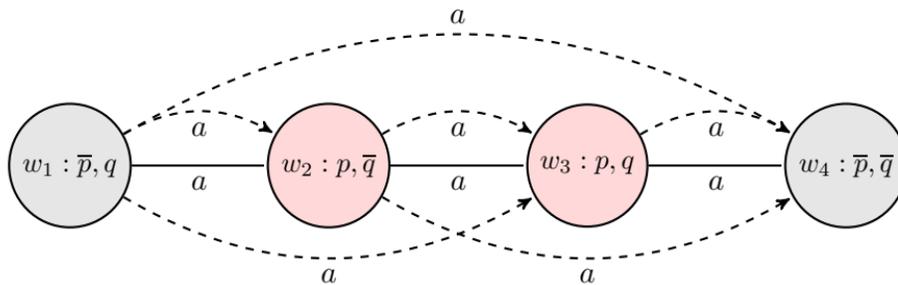
Радикальное обновление

$$\mathcal{M}, w \models [\uparrow \varphi] \psi \text{ е.т.е. } \mathcal{M}^{\uparrow \varphi}, w \models \psi$$

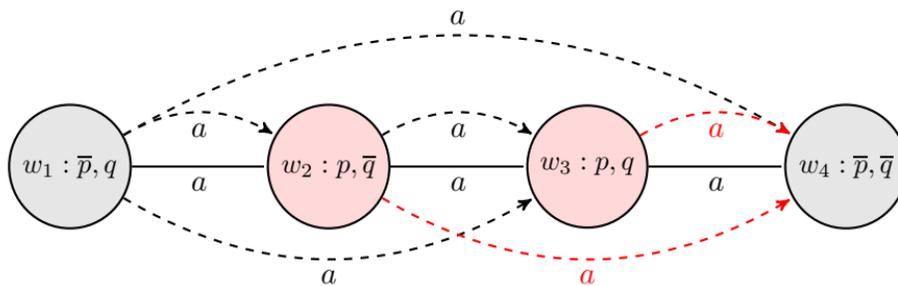
Пример: \mathcal{M}_1



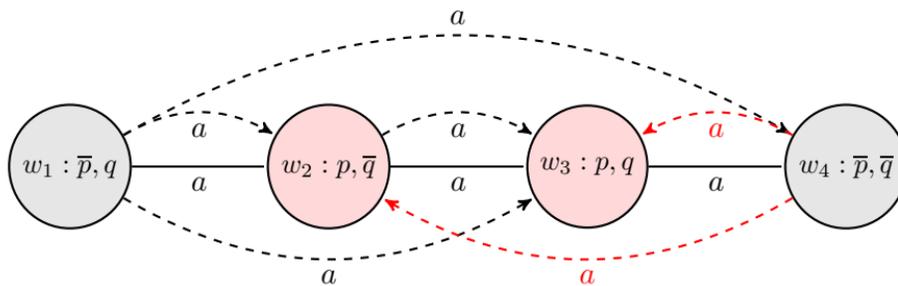
Пример: $\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_1^{\uparrow p}$



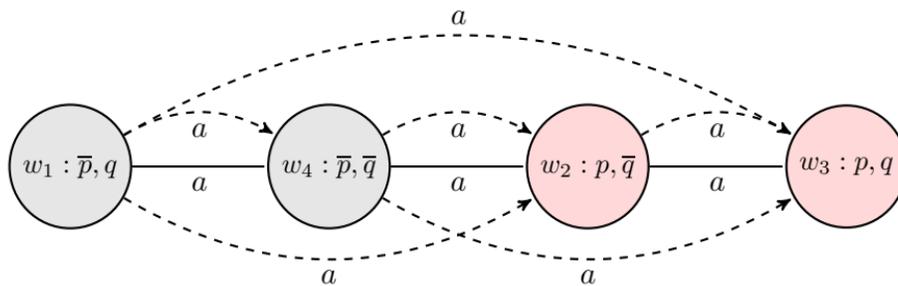
Пример: $\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_1^{\uparrow p}$



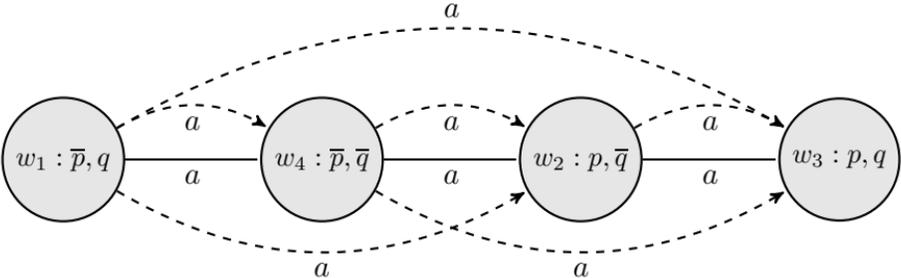
Пример: $\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_1^{\uparrow p}$



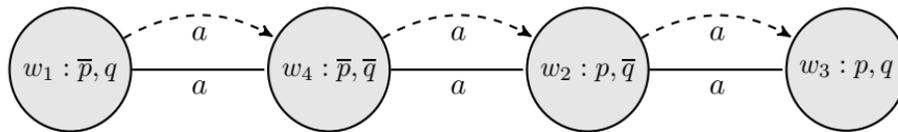
Пример: $\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_1^{\uparrow p}$



Пример: $\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_1^{\uparrow p}$



Пример: $\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_1^{\uparrow p}$



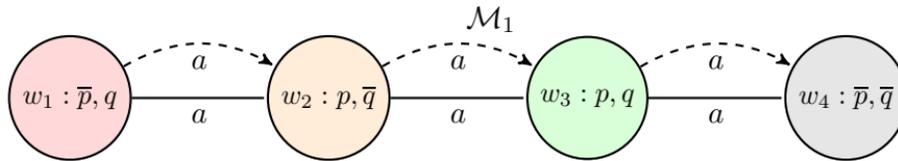
Обновление неточной информации

Радикальное обновление

СРАВНЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ

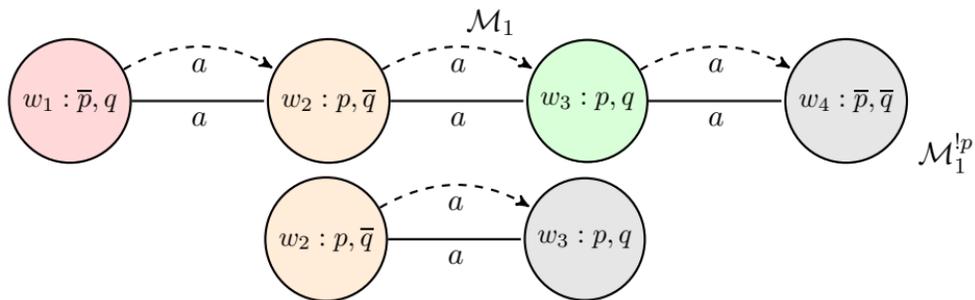
Обновление неточной информации

Радикальное обновление



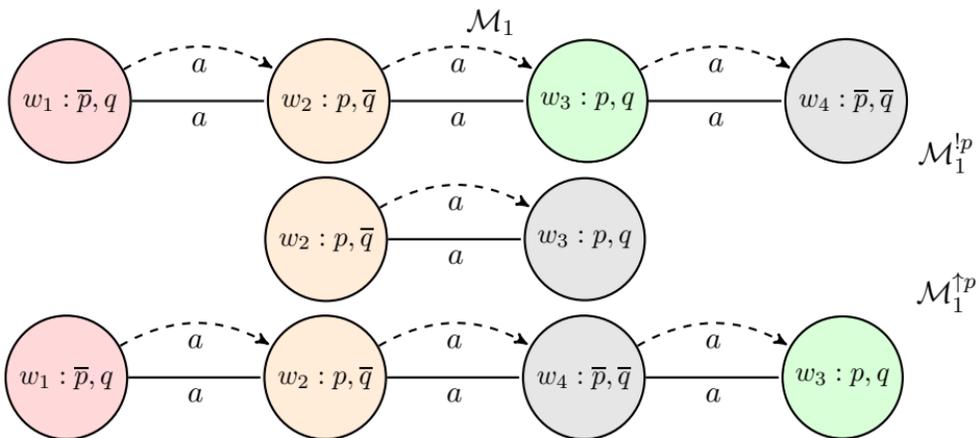
Обновление неточной информации

Радикальное обновление



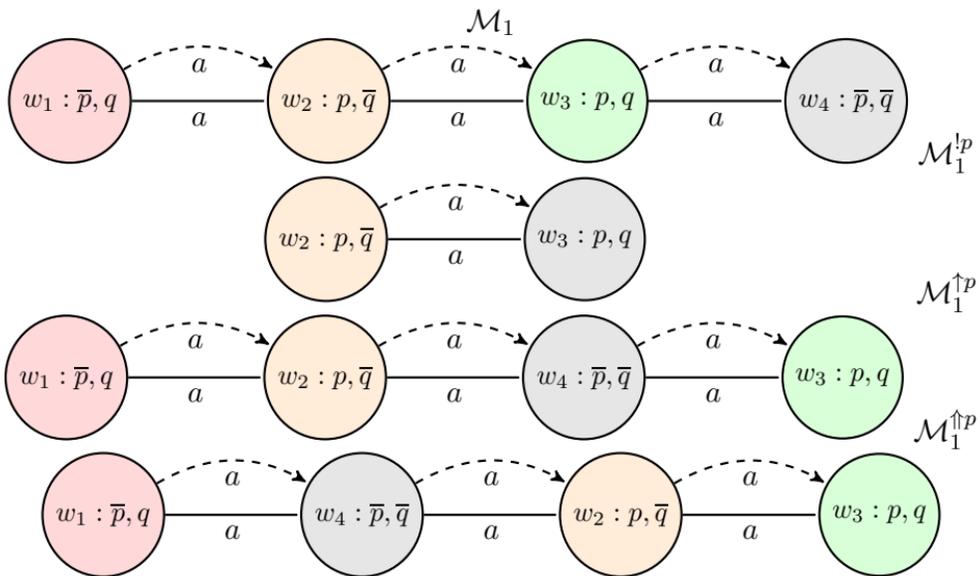
Обновление неточной информации

Радикальное обновление



Обновление неточной информации

Радикальное обновление



Обзор

ОБЗОР ОПЕРАТОРОВ

Аппарат динамической эпистемической логики

Аппарат динамической эпистемической логики

- ▶ $K_i\varphi$
- ▶ $\hat{K}_i\varphi$
- ▶ $E_G\varphi$
- ▶ $D_G\varphi$
- ▶ $C_G\varphi$
- ▶ $B_i\varphi$
- ▶ $B_i^\psi\varphi$
- ▶ $B_i^+\varphi$ ($B_i^r\varphi$)
- ▶ $B_i^s\varphi$
- ▶ $[\!\downarrow\varphi]\psi$
- ▶ $[\uparrow\varphi]\psi$
- ▶ $[\!\uparrow\varphi]\psi$

Парадокс Фитча с точки зрения динамической эпистемической логики

Парадокс Фитча с точки зрения динамической эпистемической логики

► $\varphi \rightarrow \Diamond K\varphi$

Парадокс Фитча с точки зрения динамической эпистемической логики

▶ $\varphi \rightarrow \Diamond K\varphi$

▶ $\Diamond K_i$

Парадокс Фитча с точки зрения динамической эпистемической логики

- ▶ $\varphi \rightarrow \Diamond K\varphi$
- ▶ $\Diamond K_i$
- ▶ $\mathcal{M}, w \models \Diamond K_i \varphi$
 $\exists \psi : [!\psi] K_i \varphi$

Парадокс Фитча с точки зрения динамической эпистемической логики

- ▶ $\varphi \rightarrow \Diamond K\varphi$
- ▶ $\Diamond K_i$
- ▶ $\mathcal{M}, w \models \Diamond K_i \varphi$
 $\exists \psi : [!\psi] K_i \varphi$
- ▶ $\models p \rightarrow \Diamond K_i p$
 $\not\models \varphi \rightarrow \Diamond K_i \varphi$
 $\varphi = p \wedge \neg K_i p$

1. «Рассуждающие мудрецы»

2. «Логика в баре»

Оглавление I

1	Обновление точной информации (hard update)	2
1.1	Свойства	18
1.1.1	Парадокс Мура	19
1.1.2	Истина, которая вводит в заблуждение	20
1.2	Классические задачи	22
1.2.1	«Чумазные дети»	23
1.2.2	«День Рождения Шерил»	36
2	Обновление неточной информации	50
2.1	Консервативное обновление	55
2.2	Радикальное обновление	66
3	Обзор	78
3.1	Формальный аппарат	79
3.2	Парадокс Фитча с точки зрения DEL	80
3.3	Задачи: «Рассуждающие мудрецы», «Логика в баре»	81