

Доксастическая логика

Виталий Долгоруков

Международная лаборатория логики, лингвистики и формальной философии
НИУ ВШЭ

30 ноября 2023 г.

Основные понятия доксистической логики

Основные понятия доксистической логики

- ▶ $B_i\varphi$ – агент i полагает (считает/верит/думает), что φ

Основные понятия доксистической логики

- ▶ $B_i\varphi$ – агент i полагает (считает/верит/думает), что φ
- ▶ (но он может ошибаться)

Основные понятия доксистической логики

- ▶ $B_i\varphi$ – агент i полагает (считает/верит/думает), что φ
- ▶ (но он может ошибаться)

Основные понятия доксистической логики

- ▶ $B_i\varphi$ – агент i полагает (считает/верит/думает), что φ
- ▶ (но он может ошибаться)
возможно, что $B_i\varphi \wedge \neg\varphi$

Некоторые свойства

Некоторые свойства

► $K_i\varphi \rightarrow B_i\varphi$

Некоторые свойства

▶ $K_i\varphi \rightarrow B_i\varphi$

▶ $K_i\varphi \rightarrow \varphi$

Некоторые свойства

- ▶ $K_i\varphi \rightarrow B_i\varphi$
- ▶ $K_i\varphi \rightarrow \varphi$
- ▶ $B_i\varphi \rightarrow B_iB_i\varphi$

Некоторые свойства

- ▶ $K_i\varphi \rightarrow B_i\varphi$
- ▶ $K_i\varphi \rightarrow \varphi$
- ▶ $B_i\varphi \rightarrow B_iB_i\varphi$
- ▶ $\neg B_i\varphi \rightarrow B_i\neg B_i\varphi$

Модель докрасической логики

$$\mathcal{M} = (W, \{\sim_i\}_{i \in A}, \{\preceq_i\}_{i \in A}, V)$$

Модель докрасической логики

$$\mathcal{M} = (W, \{\sim_i\}_{i \in A}, \{\preceq_i\}_{i \in A}, V)$$

$$\blacktriangleright \forall w' (w' \preceq_i w')$$

Модель докрасической логики

$$\mathcal{M} = (W, \{\sim_i\}_{i \in A}, \{\preceq_i\}_{i \in A}, V)$$

- ▶ $\forall w' (w' \preceq_i w')$
- ▶ $\forall w' \forall w'' \forall w''' ((w' \preceq_i w'' \wedge w'' \preceq_i w''') \rightarrow w' \preceq_i w''')$

Модель доксистической логики

$$\mathcal{M} = (W, \{\sim_i\}_{i \in A}, \{\preceq_i\}_{i \in A}, V)$$

- ▶ $\forall w' (w' \preceq_i w')$
- ▶ $\forall w' \forall w'' \forall w''' ((w' \preceq_i w'' \wedge w'' \preceq_i w''') \rightarrow w' \preceq_i w''')$
- ▶ $\forall w' \forall w'' ((w' \preceq_i w'' \vee w'' \preceq_i w') \rightarrow w' \sim_i w'')$

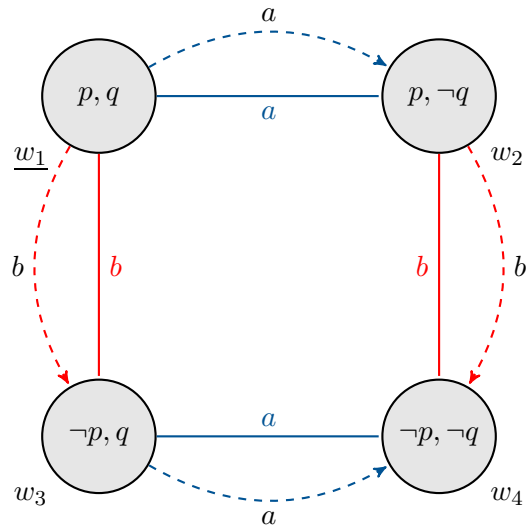
Модель докрасической логики

$$\mathcal{M} = (W, \{\sim_i\}_{i \in A}, \{\preceq_i\}_{i \in A}, V)$$

- ▶ $\forall w' (w' \preceq_i w')$
- ▶ $\forall w' \forall w'' \forall w''' ((w' \preceq_i w'' \wedge w'' \preceq_i w''') \rightarrow w' \preceq_i w''')$
- ▶ $\forall w' \forall w'' ((w' \preceq_i w'' \vee w'' \preceq_i w') \rightarrow w' \sim_i w'')$
- ▶ $\forall w' \forall w'' (w' \sim_i w'' \rightarrow (w' \preceq_i w'' \vee w'' \preceq_i w'))$

Модель доксистической логики

Модель доксистической логики



Некоторые понятия

Некоторые понятия

► $[\varphi]_{\mathcal{M}} := \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models \varphi\}$

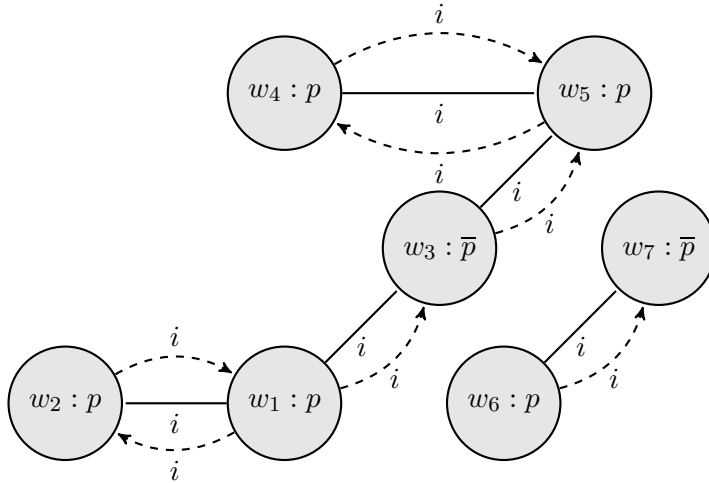
Некоторые понятия

- ▶ $[\varphi]_{\mathcal{M}} := \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models \varphi\}$
- ▶ $[w]_i := \{w' \in W \mid w \sim_i w'\}$

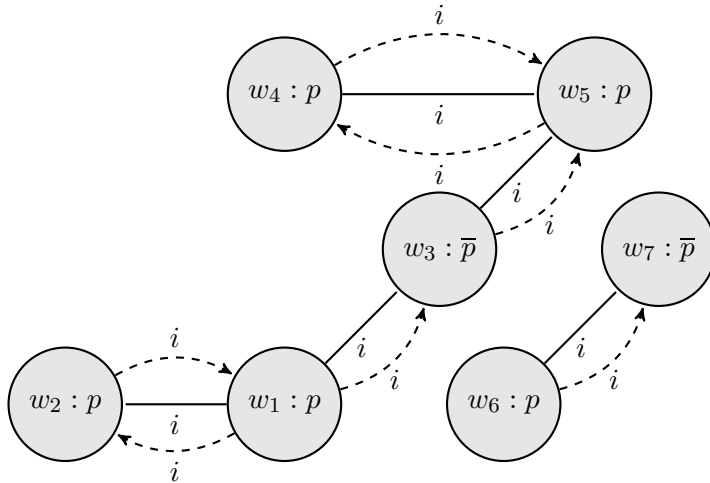
Некоторые понятия

- ▶ $[\varphi]_{\mathcal{M}} := \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models \varphi\}$
- ▶ $[w]_i := \{w' \in W \mid w \sim_i w'\}$
- ▶ $\max_{\preceq_i}(X) := \{w \in X \mid \forall w' \in X : w' \preceq_i w\}$, где $X \subseteq W$

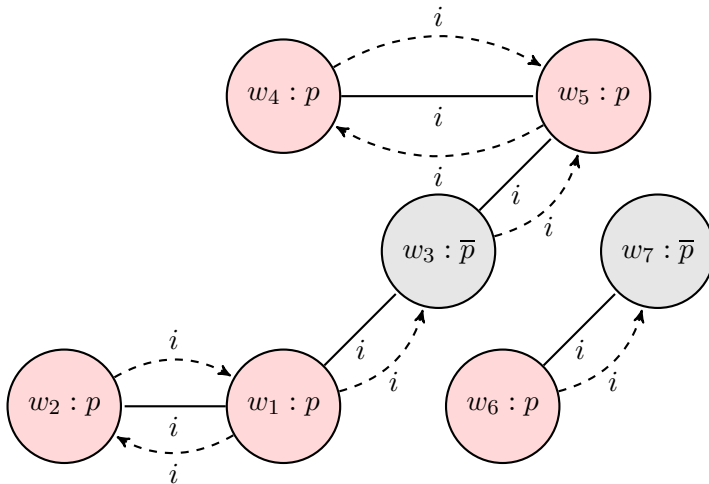
$$[\varphi]_{\mathcal{M}} := \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models \varphi\}$$



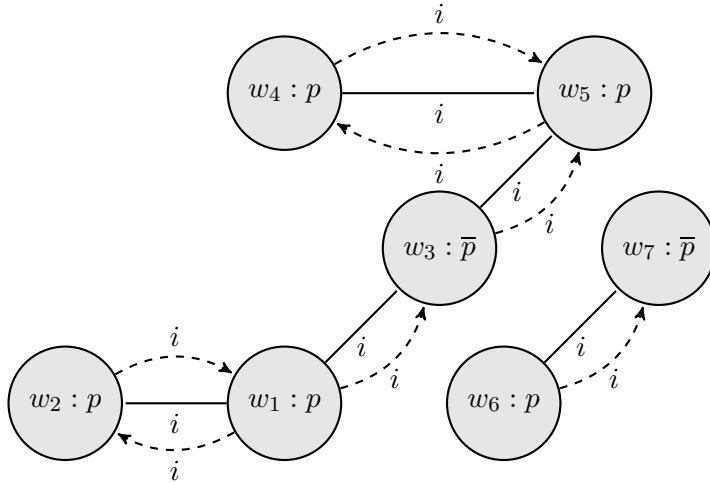
$[\varphi]_{\mathcal{M}} := \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models \varphi\}$, $[p]_{\mathcal{M}} = ?$



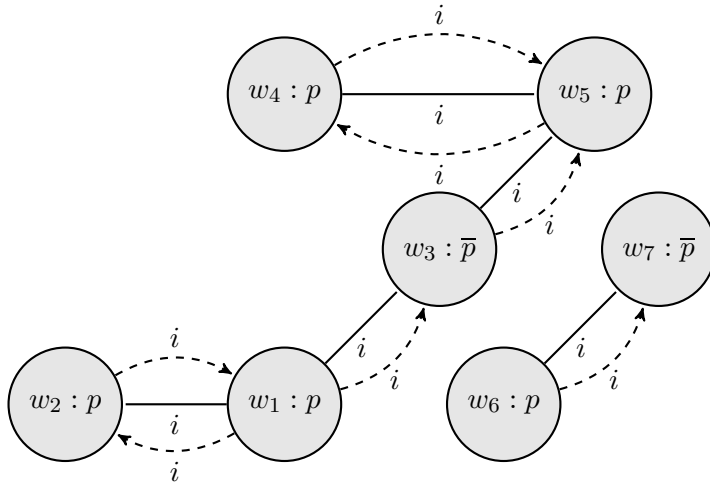
$[\varphi]_{\mathcal{M}} := \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models \varphi\}$, $[p]_{\mathcal{M}} = \{w_1, w_2, w_4, w_5, w_6\}$



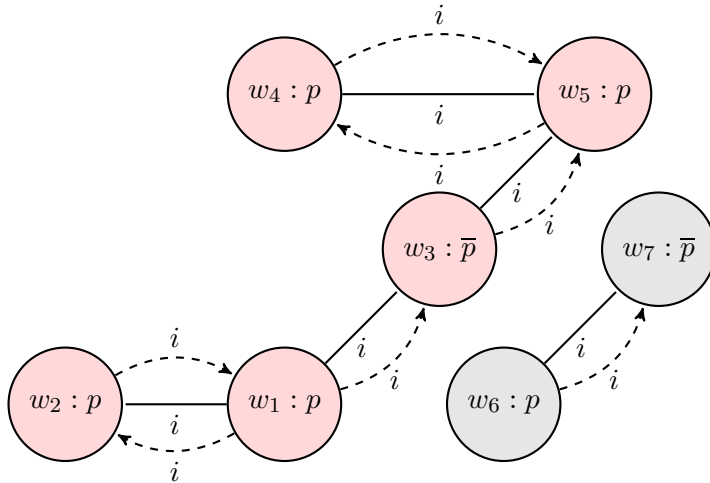
$$[w]_i := \{w' \in W \mid w \sim_i w'\}$$



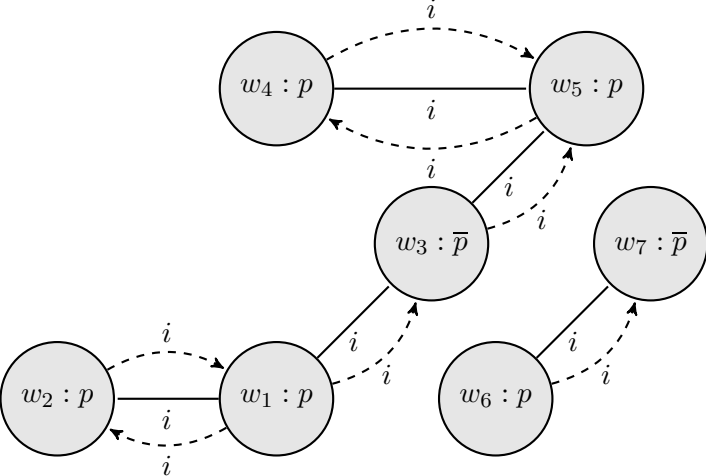
$[w]_i := \{w' \in W \mid w \sim_i w'\}$, $[w_1]_i = ?$



$$[w]_i := \{w' \in W \mid w \sim_i w'\}, [w_1]_i = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$$

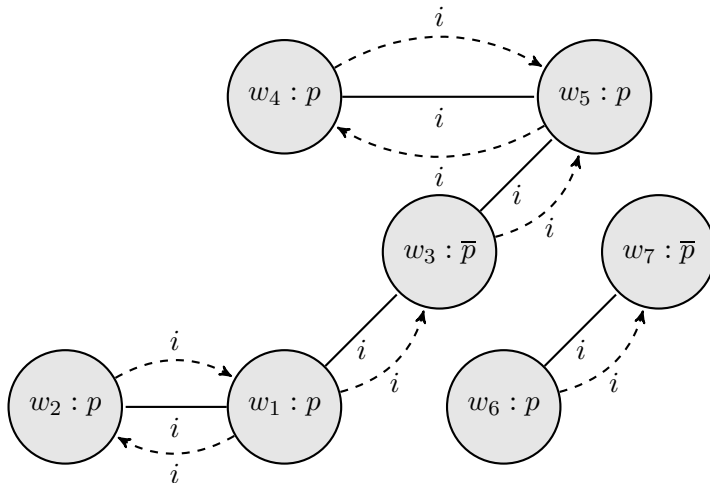


$$\max_{\preceq_i}(X) := \{w \in X \mid \forall w' \in X : w' \preceq_i w\}, \text{ где } X \subseteq W$$



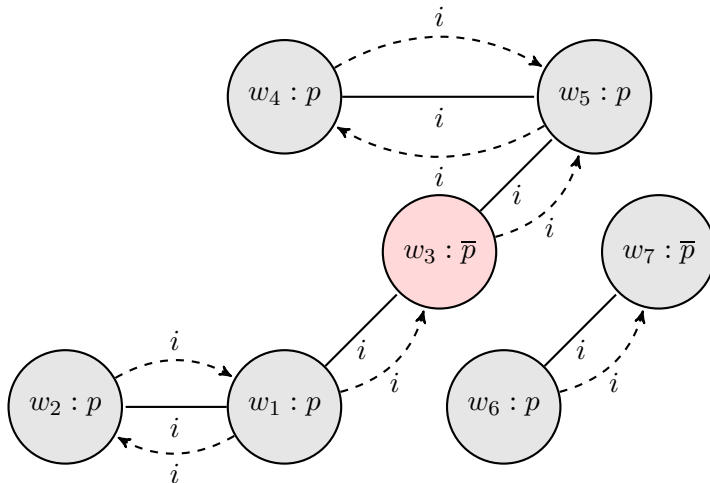
$\max_{\preceq_i}(X) := \{w \in X \mid \forall w' \in X : w' \preceq_i w\}$, где $X \subseteq W$,

$\max_{\preceq_i}(\{w_1, w_2, w_3\}) = ?$



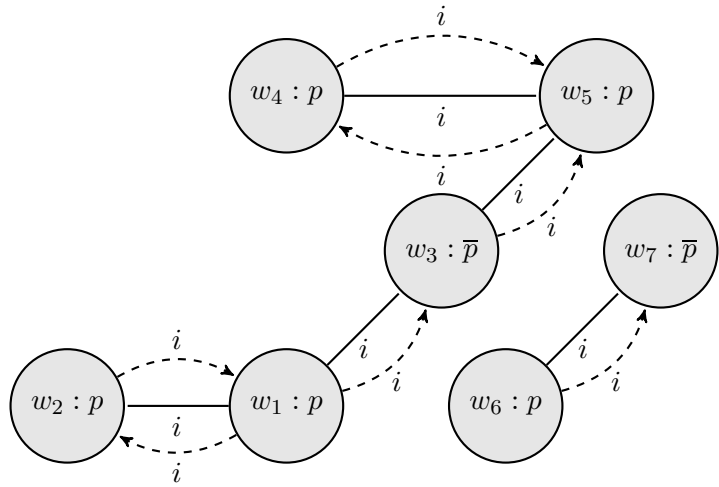
$\max_{\preceq_i}(X) := \{w \in X \mid \forall w' \in X : w' \preceq_i w\}$, где $X \subseteq W$,

$\max_{\preceq_i}(\{w_1, w_2, w_3\}) = \{w_3\}$



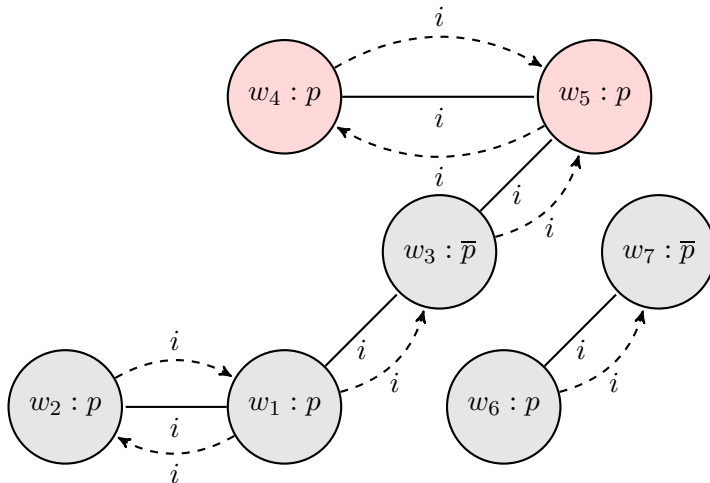
$\max_{\preceq_i}(X) := \{w \in X \mid \forall w' \in X : w' \preceq_i w\}$, где $X \subseteq W$,

$\max_{\preceq_i}([w_2]_i) = ?$



$\max_{\preceq_i}(X) := \{w \in X \mid \forall w' \in X : w' \preceq_i w\}$, где $X \subseteq W$,

$\max_{\preceq_i}([w_2]_i) = \{w_4, w_5\}$

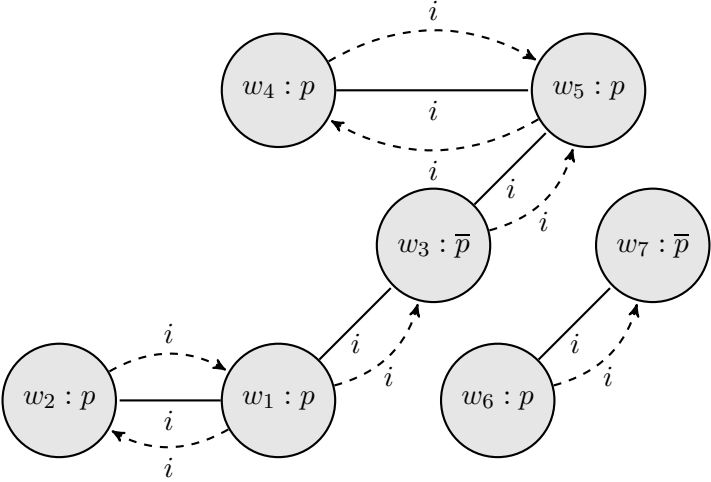


Определение B_i

$\mathcal{M}, w \models B_i \varphi$ е.т.е. $\forall w' \in \max_{\preceq_i}([w]_i) : \mathcal{M}, w' \models \varphi$

$\mathcal{M}, w_1 \models B_i p$

$\mathcal{M}, w_6 \not\models B_i p$



Конфликт мнений

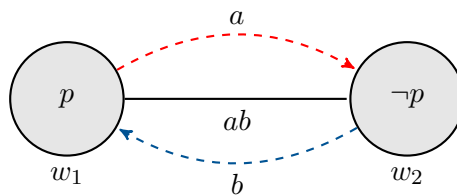
Пример:

Борис смотрит программу «Здоровье» и верит, что настойка из корня лопуха спасает от алкоголизма, а Андрей не смотрит программу «Здоровье», но любит пить водку, поэтому он не верит, что какая-то настойка может помочь.

Пример-1

Пример-1

Пример-1



Пример-2

Пример-2

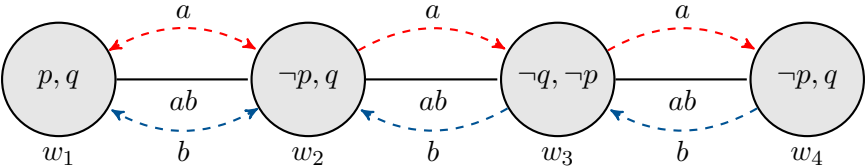
Пример-2

Пример-2

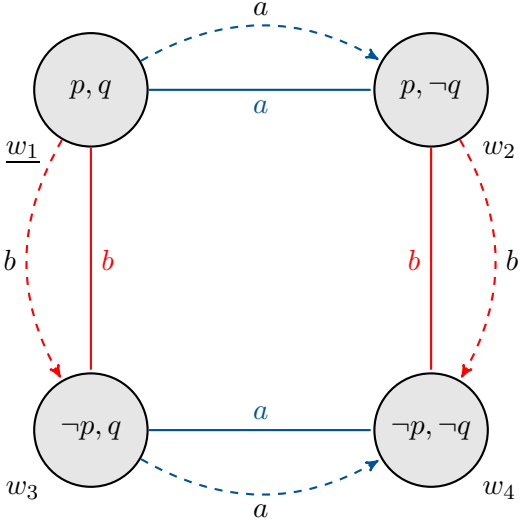
Пример-2

Пример-2

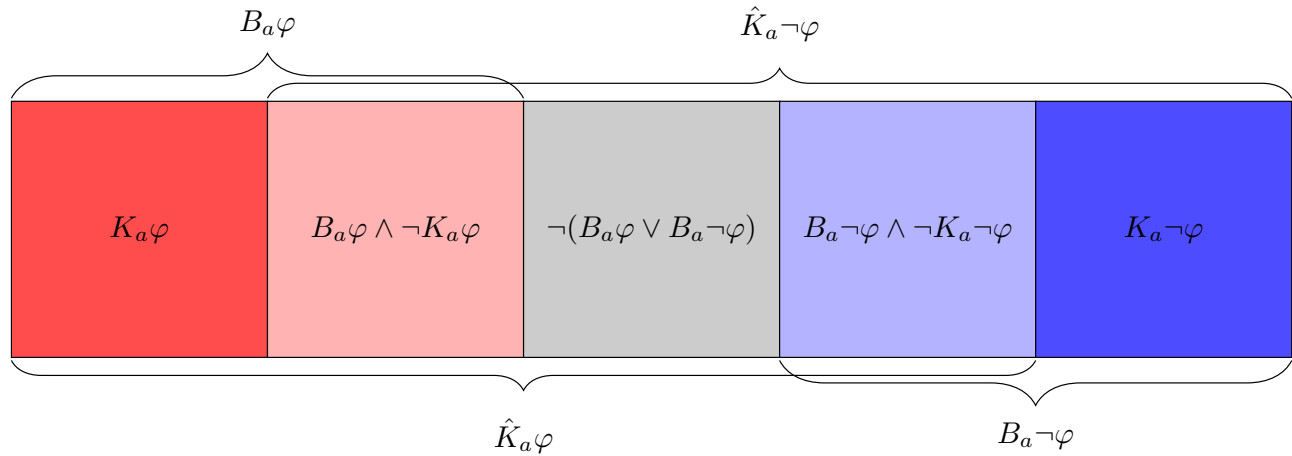
Пример-2



Пример-3



Отношения между базовыми операторами



Условное убеждение

Условное убеждение

► $\mathcal{M}, w \models B_i \varphi$ е.т.е. $\forall w' \in \max_{\preceq_i}([w]_i) : \mathcal{M}, w' \models \varphi$

Условное убеждение

- ▶ $\mathcal{M}, w \models B_i \varphi$ е.т.е. $\forall w' \in \max_{\preceq_i}([w]_i) : \mathcal{M}, w' \models \varphi$
- ▶ $\mathcal{M}, w \models B_i^\psi \varphi$ е.т.е. $\forall w' \in \max_{\preceq_i}([w]_i \cap [\psi]_{\mathcal{M}}) : \mathcal{M}, w' \models \varphi$

Убеждение vs. условное убеждение

$$B_a \neg p \wedge B_a^q p$$

Основные понятия доксистической логики

Условное убеждение

Основные понятия доксистической логики

Условное убеждение

Основные понятия доксистической логики

Условное убеждение

Основные понятия доксистической логики

Условное убеждение

Основные понятия доксистической логики

Условное убеждение

Основные понятия доксистической логики

Условное убеждение

Основные понятия доксистической логики

Условное убеждение

Основные понятия доксистической логики

Условное убеждение

Основные понятия доксистической логики

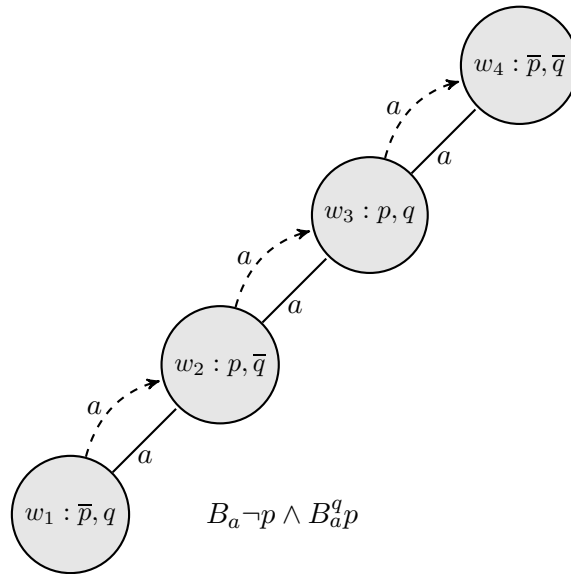
Условное убеждение

Основные понятия доксистической логики

Условное убеждение

Основные понятия докстической логики

Условное убеждение



Знание, убеждение, условное убеждение

Определение знания и безусловного убеждения через условное убеждение

Знание, убеждение, условное убеждение

Определение знания и безусловного убеждения через условное убеждение

► $B_i\varphi = B_i^\top\varphi$

Знание, убеждение, условное убеждение

Определение знания и безусловного убеждения через условное убеждение

- ▶ $B_i\varphi = B_i^\top\varphi$
- ▶ $K_i\varphi = B_i^\psi\varphi$ для любого ψ

Формулы и модели

Упражнение

Постройте модели для следующих формул:

1. $B_a\varphi \wedge \neg\varphi$
2. $B_a\varphi \wedge \neg K_a\varphi$
3. $B_a\varphi \wedge \neg K_b B_a\varphi$
4. $B_a\varphi \wedge B_b B_a \neg\varphi$
5. $\neg B_a^\psi \varphi \wedge B_a(\psi \rightarrow \varphi)$

Новые операторы

robust belief (твердое убеждение)

Новые операторы

robust belief (твердое убеждение)

$\mathcal{M}, w \models B_i^+ \varphi$ е.т.е. $\forall w' (w \preceq_i w' \rightarrow \mathcal{M}, w' \models \varphi)$

Новые операторы

robust belief (твердое убеждение)

$\mathcal{M}, w \models B_i^+ \varphi$ е.т.е. $\forall w' (w \preceq_i w' \rightarrow \mathcal{M}, w' \models \varphi)$

strong belief (крепкое убеждение)

Новые операторы

robust belief (твердое убеждение)

$\mathcal{M}, w \models B_i^+ \varphi$ е.т.е. $\forall w' (w \preceq_i w' \rightarrow \mathcal{M}, w' \models \varphi)$

strong belief (крепкое убеждение)

$\mathcal{M}, w \models B_i^s \varphi$ е.т.е.

Новые операторы

robust belief (твердое убеждение)

$\mathcal{M}, w \models B_i^+ \varphi$ е.т.е. $\forall w' (w \preceq_i w' \rightarrow \mathcal{M}, w' \models \varphi)$

strong belief (крепкое убеждение)

$\mathcal{M}, w \models B_i^s \varphi$ е.т.е.

1) $\hat{K}_i \varphi$

Новые операторы

robust belief (твердое убеждение)

$\mathcal{M}, w \models B_i^+ \varphi$ е.т.е. $\forall w' (w \preceq_i w' \rightarrow \mathcal{M}, w' \models \varphi)$

strong belief (крепкое убеждение)

$\mathcal{M}, w \models B_i^s \varphi$ е.т.е.

1) $\hat{K}_i \varphi$

2) $([w]_i \cap [\neg\varphi]_{\mathcal{M}}) \prec_i ([w]_i \cap [\varphi]_{\mathcal{M}})$, где

Новые операторы

robust belief (твердое убеждение)

$\mathcal{M}, w \models B_i^+ \varphi$ е.т.е. $\forall w' (w \preceq_i w' \rightarrow \mathcal{M}, w' \models \varphi)$

strong belief (крепкое убеждение)

$\mathcal{M}, w \models B_i^s \varphi$ е.т.е.

1) $\hat{K}_i \varphi$

2) $([w]_i \cap [\neg \varphi]_{\mathcal{M}}) \prec_i ([w]_i \cap [\varphi]_{\mathcal{M}})$, где

$X \prec_i Y := \forall x \in X \forall y \in Y : x \prec_i y$

Основные понятия доксистической логики

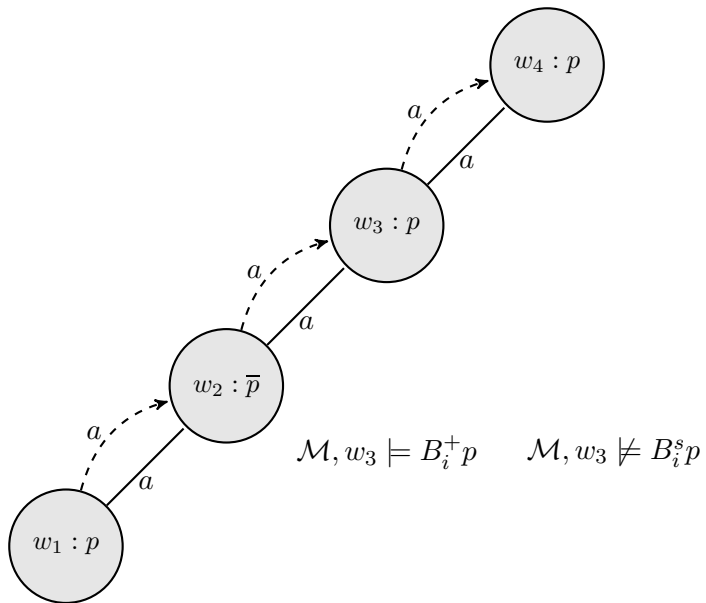
Твердое (robust) и крепкое (strong) убеждение

Основные понятия доксистической логики

Твердое (robust) и крепкое (strong) убеждение

Основные понятия докастической логики

Твердое (robust) и крепкое (strong) убеждение



Основные понятия доксистической логики

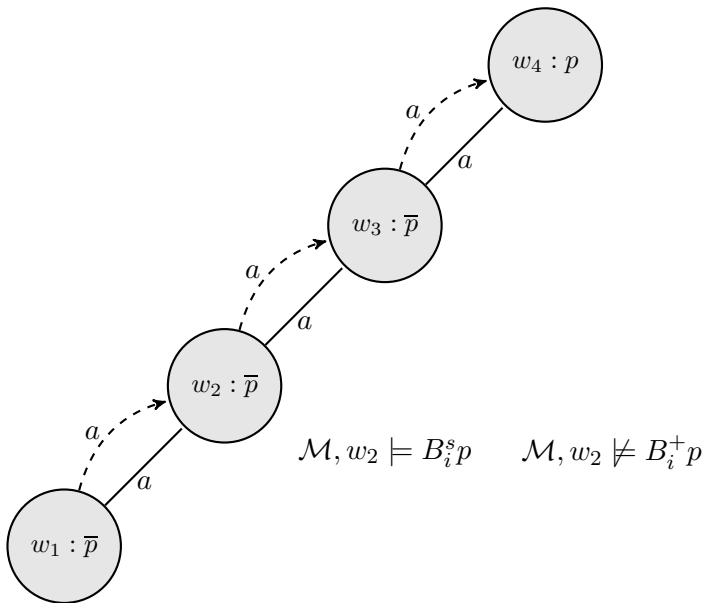
Твердое (robust) и крепкое (strong) убеждение

Основные понятия доксистической логики

Твердое (robust) и крепкое (strong) убеждение

Основные понятия докастической логики

Твердое (robust) и крепкое (strong) убеждение



Взаимовыразимость докстических операторов

Взаимовыразимость докстических операторов

Некоторые свойства

Взаимовыразимость докстических операторов

Некоторые свойства

- ▶ $\mathcal{M}, w \models B_i^+ \varphi$ е.т.е. $\mathcal{M}, w \models B_i^\psi \varphi$
для любых $\psi : \mathcal{M}, w \models \psi$

Взаимовыразимость докстических операторов

Некоторые свойства

- ▶ $\mathcal{M}, w \models B_i^+ \varphi$ е.т.е. $\mathcal{M}, w \models B_i^\psi \varphi$
для любых $\psi : \mathcal{M}, w \models \psi$
- ▶ $\mathcal{M}, w \models B_i^s \varphi$ е.т.е. $\mathcal{M}, w \models B_i \varphi$ и
 $\mathcal{M}, w \models B_i^\psi \varphi$ для любых $\psi : \mathcal{M}, w \models \neg K_i(\psi \rightarrow \neg \varphi)$

Взаимовыразимость докстических операторов

Некоторые свойства

- ▶ $\mathcal{M}, w \models B_i^+ \varphi$ е.т.е. $\mathcal{M}, w \models B_i^\psi \varphi$
для любых $\psi : \mathcal{M}, w \models \psi$
- ▶ $\mathcal{M}, w \models B_i^s \varphi$ е.т.е. $\mathcal{M}, w \models B_i \varphi$ и
 $\mathcal{M}, w \models B_i^\psi \varphi$ для любых $\psi : \mathcal{M}, w \models \neg K_i(\psi \rightarrow \neg \varphi)$
- ▶ $[K_i(\varphi \vee B_i^+ \psi) \wedge K_i(\psi \vee B_i^+ \varphi)] \rightarrow (K_i \varphi \vee K_i \psi)$

Взаимовыразимость докстических операторов

Некоторые свойства

- ▶ $\mathcal{M}, w \models B_i^+ \varphi$ е.т.е. $\mathcal{M}, w \models B_i^\psi \varphi$
для любых $\psi : \mathcal{M}, w \models \psi$
- ▶ $\mathcal{M}, w \models B_i^s \varphi$ е.т.е. $\mathcal{M}, w \models B_i \varphi$ и
 $\mathcal{M}, w \models B_i^\psi \varphi$ для любых $\psi : \mathcal{M}, w \models \neg K_i(\psi \rightarrow \neg \varphi)$
- ▶ $[K_i(\varphi \vee B_i^+ \psi) \wedge K_i(\psi \vee B_i^+ \varphi)] \rightarrow (K_i \varphi \vee K_i \psi)$
- ▶ $B_i^\varphi \psi \equiv [\hat{K}_i \varphi \rightarrow \hat{K}_i(\varphi \wedge B_i^+(\varphi \rightarrow \psi))]$

Взаимовыразимость докстических операторов

Некоторые свойства

- ▶ $\mathcal{M}, w \models B_i^+ \varphi$ е.т.е. $\mathcal{M}, w \models B_i^\psi \varphi$
для любых $\psi : \mathcal{M}, w \models \psi$
- ▶ $\mathcal{M}, w \models B_i^s \varphi$ е.т.е. $\mathcal{M}, w \models B_i \varphi$ и
 $\mathcal{M}, w \models B_i^\psi \varphi$ для любых $\psi : \mathcal{M}, w \models \neg K_i(\psi \rightarrow \neg \varphi)$
- ▶ $[K_i(\varphi \vee B_i^+ \psi) \wedge K_i(\psi \vee B_i^+ \varphi)] \rightarrow (K_i \varphi \vee K_i \psi)$
- ▶ $B_i^\varphi \psi \equiv [\hat{K}_i \varphi \rightarrow \hat{K}_i(\varphi \wedge B_i^+(\varphi \rightarrow \psi))]$
- ▶ $B_i^s \varphi \equiv [\hat{K}_i \varphi \wedge K_i(\varphi \rightarrow B_i^+ \varphi)]$

Элементы формальной эпистемологии

ЭЛЕМЕНТЫ ФОРМАЛЬНОЙ ЭПИСТЕМОЛОГИИ

Обзор эпистемических и доксистических операторов

Обзор эпистемических и доксистических операторов

Операторы:

▶ $K_i\varphi$

Обзор эпистемических и доксистических операторов

Операторы:

- ▶ $K_i\varphi$
- ▶ $\hat{K}_i\varphi$

Обзор эпистемических и доксистических операторов

Операторы:

- ▶ $K_i\varphi$
- ▶ $\hat{K}_i\varphi$
- ▶ $E_G\varphi$

Обзор эпистемических и доксистических операторов

Операторы:

- ▶ $K_i\varphi$
- ▶ $\hat{K}_i\varphi$
- ▶ $E_G\varphi$
- ▶ $D_G\varphi$

Обзор эпистемических и доксистических операторов

Операторы:

- ▶ $K_i\varphi$
- ▶ $\hat{K}_i\varphi$
- ▶ $E_G\varphi$
- ▶ $D_G\varphi$
- ▶ $C_G\varphi$

Обзор эпистемических и доксистических операторов

Операторы:

- ▶ $K_i\varphi$
- ▶ $\hat{K}_i\varphi$
- ▶ $E_G\varphi$
- ▶ $D_G\varphi$
- ▶ $C_G\varphi$
- ▶ $B_i\varphi$

Обзор эпистемических и доксистических операторов

Операторы:

- ▶ $K_i\varphi$
- ▶ $\hat{K}_i\varphi$
- ▶ $E_G\varphi$
- ▶ $D_G\varphi$
- ▶ $C_G\varphi$
- ▶ $B_i\varphi$
- ▶ $B_i^+\varphi$

Обзор эпистемических и доксистических операторов

Операторы:

- ▶ $K_i\varphi$
- ▶ $\hat{K}_i\varphi$
- ▶ $E_G\varphi$
- ▶ $D_G\varphi$
- ▶ $C_G\varphi$
- ▶ $B_i\varphi$
- ▶ $B_i^+\varphi$
- ▶ $B_i^s\varphi$

Обзор эпистемических и доксистических операторов

Операторы:

- ▶ $K_i\varphi$
- ▶ $\hat{K}_i\varphi$
- ▶ $E_G\varphi$
- ▶ $D_G\varphi$
- ▶ $C_G\varphi$
- ▶ $B_i\varphi$
- ▶ $B_i^+\varphi$
- ▶ $B_i^s\varphi$
- ▶ $B_i^\psi\varphi$

Глаз vs. Микроскоп

Готтлоб Фреге (Gottlob Frege, 1848 — 1925):

«Отношение моего языка формул – понятийной записи к [повседневному] языку, я думаю, лучше всего можно пояснить, если сравнить его с отношением микроскопа к глазу. Последний благодаря широте своей применимости, благодаря той гибкости, с которой он приспосабливается к самым разным условиям, обладает громадным преимуществом перед микроскопом. <...> Но как только задачи науки предъявляют более высокие требования к остроте различения, обнаруживается, что глаз им не удовлетворяет. Напротив, микроскоп наилучшим образом приспособлен как раз для этих целей, но именно поэтому непригоден для всех остальных».¹

¹Фреге Г. Исчисление понятий, язык формул чистого мышления, построенный по образцу арифметического // Фреге Г. Логика и семантика. М.: Аспект-Пресс, 2000. С. 66.

Эпистемическая логика и формальная эпистемология

- ▶ Проблема Геттиера²
- ▶ Парадокс Фитча³

²<https://plato.stanford.edu/entries/knowledge-analysis/>

³<https://plato.stanford.edu/entries/fitch-paradox/>

Проблема Геттиера

Проблема Геттиера

Трехчастная модель знания:

знание – истинное обоснованное мнение

Проблема Геттиера

Трехчастная модель знания:

знание – истинное обоснованное мнение

a знает, что *p*

Проблема Геттиера

Трехчастная модель знания:

знание – истинное обоснованное мнение

a знает, что p

- ▶ a считает, что p

Проблема Геттиера

Трехчастная модель знания:

знание – истинное обоснованное мнение

a знает, что p

- ▶ a считает, что p
- ▶ a считает, что p в силу некоторого основания q

Проблема Геттиера

Трехчастная модель знания:

знание – истинное обоснованное мнение

a знает, что p

- ▶ a считает, что p
- ▶ a считает, что p в силу некоторого основания q
- ▶ p истинно

Парадокс Фитча

Существуют ли непознаваемые факты?

Парадокс Фитча

Существуют ли непознаваемые факты?

Допущения

1. $\varphi \rightarrow \Diamond K\varphi$

Парадокс Фитча

Существуют ли непознаваемые факты?

Допущения

1. $\varphi \rightarrow \Diamond K\varphi$
2. $K\varphi \rightarrow \varphi$

Парадокс Фитча

Существуют ли непознаваемые факты?

Допущения

1. $\varphi \rightarrow \Diamond K\varphi$
2. $K\varphi \rightarrow \varphi$
3. $K(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (K\varphi \wedge K\psi)$

Парадокс Фитча

Существуют ли непознаваемые факты?

Допущения

1. $\varphi \rightarrow \Diamond K\varphi$
2. $K\varphi \rightarrow \varphi$
3. $K(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (K\varphi \wedge K\psi)$

Парадокс Фитча

Существуют ли непознаваемые факты?

Допущения

1. $\varphi \rightarrow \Diamond K\varphi$
2. $K\varphi \rightarrow \varphi$
3. $K(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (K\varphi \wedge K\psi)$

Парадокс

Допустим, что $p \wedge \neg Kp$.

Парадокс Фитча

Существуют ли непознаваемые факты?

Допущения

1. $\varphi \rightarrow \Diamond K\varphi$
2. $K\varphi \rightarrow \varphi$
3. $K(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (K\varphi \wedge K\psi)$

Парадокс

Допустим, что $p \wedge \neg Kp$.

Отсюда следует, что ... $p \rightarrow Kp$

Дополнительно

- ▶ Общее знание (в социальных науках) Михаил Соколов / ПостНаука
- ▶ Steven Pinker: The Elephant, the Emperor, and the Matzo Ball (про общее знание в психологии)
- ▶ SEP: Epistemic Logic
- ▶ SEP: Common Knowledge
- ▶ Mutual Knowledge
- ▶ Philpapers: Epistemic Logic
- ▶ SEP: Formal Epistemology
- ▶ Philpapers: Formal Epistemology
- ▶ SEP: Epistemic Paradoxes
- ▶ SEP: Fitch's Paradox of Knowability
- ▶ Vincent Hendricks: The trouble with bubbles

Оглавление I

1	Основные понятия доксистической логики	1
1.1	Оператор убеждения	1
1.2	Конфликт мнений	19
1.3	Отношения между базовыми операторам	23
1.4	Условное убеждение	24
1.5	Твердое (robust) и крепкое (strong) убеждение	29
2	Элементы формальной эпистемологии	33
2.1	Обзор эпистемических и доксистических операторов	34
2.2	Проблема Геттиера	37
2.3	Парадокс Фитча	38