

Введение в математическую логику и теорию алгоритмов

Семинар № 2: Упорядоченные множества. Арифметика порядков.

Мы будем рассматривать структуры вида¹ (A, R) , где A — непустое множество, R — двуместное (= бинарное) отношение на A , то есть $R \subseteq A \times A$. Часто R будем обозначать символом $<$ или \leq .

Определение 1. (Нестрого) частично упорядоченное множество — это структура (A, \leq) , удовл. условиям:

- (1) (рефлексивность) $\forall x (x \leq x)$,
- (2) (транзитивность) $\forall x, y, z (x \leq y \ \& \ y \leq z \Rightarrow x \leq z)$,
- (3) (антисимметричность) $\forall x, y (x \leq y \ \& \ y \leq x \Rightarrow x = y)$.

Определение 2. (Строго) частично упорядоченное множество — это структура $(A, <)$, удовл. условиям:

- (1') (иррефлексивность) $\forall x \neg(x < x)$,
- (2') (транзитивность) $\forall x, y, z (x < y \ \& \ y < z \Rightarrow x < z)$.

Задача 1. Докажите: **а)** если структура (A, \leq) удовлетворяет (1,2,3), то положив $(x < y) \equiv (x \leq y) \ \& \ (x \neq y)$, мы получим структуру $(A, <)$, удовлетворяющую (1',2'); **б)** наоборот, если структура $(A, <)$ удовлетворяет (1',2'), то задав $(x \leq y) \equiv (x < y) \vee (x = y)$, мы получим структуру (A, \leq) , удовлетворяющую (1,2,3).

Поэтому с какими порядками работать — нестрогими или строгими — лишь дело удобства. Все дальнейшие определения и утверждения, данные в терминах одного, можно переформулировать в терминах другого.

Определение 3. Частично упорядоченное множество (A, \leq) называется *линейно* упорядоченным (а отношение \leq — *линейным порядком* на A), если выполнено условие:

- (4) (линейность) $\forall x, y (x \leq y \vee y \leq x)$.

В терминах строго порядка линейность формулируется так: (4') $\forall x, y, (x < y \vee x = y \vee y < x)$.

Примеры. Линейные порядки: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ с отношением \leq .

Частичный порядок $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$. Нарисуйте диаграмму ч.у.м. $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$.

Определение 4. Две структуры (A, \leq_1) и (B, \leq_2) называются *изоморфными*, и пишем: $(A, \leq_1) \cong (B, \leq_2)$, если существует биекция $h: A \rightarrow B$, такая что для любых $a, a' \in A$ имеем: $a \leq_1 a' \Leftrightarrow h(a) \leq_2 h(a')$. f — *изоморфизм*.

Упражнение: Докажите, что для линейных порядков достаточно импликации \Rightarrow в определении изоморфизма.

Задача 2. а) Докажите: $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq) \cong (\{0, 1\}^3, \preceq)$, где $(x_1, x_2, x_3) \preceq (y_1, y_2, y_3) \Leftrightarrow \forall i \leq 3 (x_i \leq y_i)$.

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$, где M — конечное множество.

в) Пусть M — бесконечное множество. Докажите: $(\mathcal{P}(M), \subseteq) \cong ((M \rightarrow 2), \preceq)$, где $(M \rightarrow 2)$ — множество всех функций $f: M \rightarrow \{0, 1\}$, а частичный порядок задан так: $f \preceq g \Leftrightarrow \forall x [f(x) \leq g(x)]$.

Наименьший и минимальный элемент

Пусть (A, \leq) — частично упорядоченное множество.

Элемент $a \in A$ называется *минимальным*, если меньше него нет элементов: $\neg \exists b b < a$.

Элемент $a \in A$ называется *наименьшим*, если все элементы больше или равны ему: $\forall b a \leq b$.

Аналогично можно дать определение элемента, минимального и наименьшего в некотором подмножестве $X \subseteq A$.

Задача 3. а) Приведите пример ч.у.м. (A, \leq) , в котором минимальные элементы есть, а наименьшего нет.

б) Докажите, что если a — наименьший элемент, то он — единственный минимальный.

Задача 4. Докажите, что если порядок линейен, то понятия минимального и наименьшего элемента совпадают.

Арифметика порядков

Определение 5. Пусть² $A \cap B = \emptyset$. *Суммой* линейно упорядоченных множеств (A, \leq_1) и (B, \leq_2) называется структура $(A, \leq_1) + (B, \leq_2) := (A \cup B, \leq)$, где порядок \leq задан так (к множеству A справа «приставили» B):

$$x \leq y \Leftrightarrow [(x, y \in A \ \& \ x \leq_1 y) \ \text{или} \ (x, y \in B \ \& \ x \leq_2 y) \ \text{или} \ (x \in A \ \& \ y \in B)].$$

Задача 5. а) Сумма линейных порядков — линейный порядок.

б) Сумма — ассоциативна: $[(A, \leq_1) + (B, \leq_2)] + (C, \leq_3) \cong (A, \leq_1) + [(B, \leq_2) + (C, \leq_3)]$.

в) Сумма — не коммутативна (с точностью до изоморфизма, конечно); приведите контрпример.

г) Для конечных линейных порядков сумма — коммутативна (докажите).

д) $\mathbb{N} + \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$? $\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$? $\mathbb{Q} + \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$? $\mathbb{R} + \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$? (порядок всюду обычный \leq).

¹Заметим, что более точно говорить, что это *упорядоченная пара* $\langle A, R \rangle$.

²Если же множества A и B пересекаются, то сначала создаем их непересекающиеся «копии», и складываем уже их. В конечном итоге нас будет интересовать результат — сумма порядков — лишь с точностью до изоморфизма.

Определение 6. *Произведением* линейно упорядоченных множеств (A, \leq_1) и (B, \leq_2) называется структура $(A, \leq_1) \times (B, \leq_2) := (A \times B, \leq)$, где порядок \leq на декартовом произведении $A \times B$ задан так (« B раз по A »):

$$\langle a, b \rangle \leq \langle a', b' \rangle \iff [(b <_2 b') \text{ или } (b = b' \text{ и } a \leq_1 a')].$$

Задача 6. а) Произведение линейных порядков — линейный порядок.

б) Произведение — ассоциативно: $[(A, \leq_1) \times (B, \leq_2)] \times (C, \leq_3) \cong (A, \leq_1) \times [(B, \leq_2) \times (C, \leq_3)]$.

в) Произведение — не коммутативно (опять с точностью до изоморфизма); приведите контрпример.

г) Для конечных линейных порядков произведение — коммутативно (докажите).

Линейно упорядоченное множество натуральных чисел обозначается буквой $\omega = (\mathbb{N}, \leq)$.

Задача 7. Изоморфны ли произведения $2 \times \omega$ и $\omega \times 2$? Здесь 2 — двухэлементный линейный порядок.

Вполне упорядоченные множества

Определение 7. Линейно упорядоченное множество (A, \leq) наз. *вполне упорядоченным* (well-ordered), если:

(5) в любом непустом подмножестве $X \subseteq A$ имеется наименьший элемент:

$$\forall X \subseteq A (X \neq \emptyset \implies \exists a \in X \forall b \in X a \leq b).$$

Примеры: $\omega, \omega + 1, \omega + 2$, и так далее, $\omega + \omega, \omega + \omega + \omega$ и так далее.

(*) Подумайте, как устроено $\omega \times \omega$, то есть ω^2 ? ω^3 ? как дать определение ω^ω ?

Задача 8. а) Сумма вполне упорядоченных множеств — вполне упорядочена.

б) Произведение вполне упорядоченных множеств — вполне упорядочено.

Домашнее задание

0) Решите те из сформулированных выше задач, которые не разбирались на занятии.

Задача 9. Докажите, что всякое частично упорядоченное множество (A, \leq) вкладывается в $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$.

Задача 10. Докажите, что всякий счетный линейный порядок (A, \leq_1) вкладывается в рац. числа (\mathbb{Q}, \leq) .

То есть существует инъективная функция $h: A \rightarrow \mathbb{Q}$, такая что $a \leq_1 a' \iff h(a) \leq_2 h(a')$.

Задача 11. Линейный порядок $(A, <)$ называется *плотным*, если между любыми элементами есть элемент:

$$\forall x, z (x < z \implies \exists y (x < y \ \& \ y < z)).$$

Докажите: счетный плотный линейный порядок без наименьшего и наибольшего элемента изоморфен $(\mathbb{Q}, <)$.

Задача 12. Для любого линейно упорядоченного множества (A, \leq) следующие условия эквивалентны:

(5) в любом непустом подмножестве $X \subseteq A$ имеется наименьший элемент;

(5') для всякого $X \subseteq A$, если из $\forall b < a (b \in X)$ всегда следует $a \in X$, то непременно $X = A$;

(5'') не существует бесконечных строго убывающих последовательностей $a_0 > a_1 > a_2 > \dots$ элементов из A .

Примечание: для последнего пункта потребуются *аксиома выбора*.