Булевы алгебры и теорема Стоуна

Александр Запрягаев

Мехмат МГУ

Просеминар Кафедры математической логики и теории алгоритмов

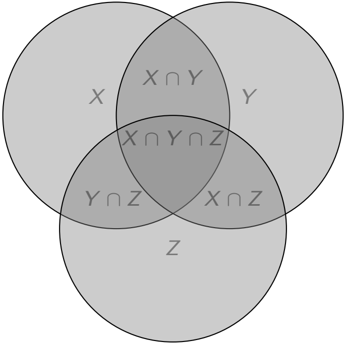
15 октября 2021

Мотивация 1: Таблицы истинности

x	y	$\neg x$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y \;\Leftrightarrow\; (\neg x \vee y)$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1

Таблица: Таблицы истинности, примеры

Мотивация 2: Множества и операции над ними



Определение

Определение

Булевой алгеброй называется непустое множество X с введёнными на нём бинарными операциями $\wedge$ (meet), $\vee$ (join), унарной операцией $\neg$ и двумя выделенными элементами 0 и 1 такими, что следующие условия выполняются для всех $a, b, c \in X$:

ассоциативность	$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$	$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
коммутативность	$a \vee b = b \vee a$	$a \wedge b = b \wedge a$
поглощение	$a \vee (a \wedge b) = a$	$a \wedge (a \vee b) = a$
тождество	$a \vee 0 = a$	$a \wedge 1 = a$
дистрибутивность	$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
дополнение	$a \vee \neg a = 1$	$a \wedge \neg a = 0$

Таблица: *Аксиомы булевой алгебры*

Двойственность!

ассоциативность	$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$	$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
коммутативность	$a \vee b = b \vee a$	$a \wedge b = b \wedge a$
поглощение	$a \vee (a \wedge b) = a$	$a \wedge (a \vee b) = a$
тождество	$a \vee 0 = a$	$a \wedge 1 = a$
дистрибутивность	$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
дополнение	$a \vee \neg a = 1$	$a \wedge \neg a = 0$

Таблица: Аксиомы булевой алгебры

Заметим, что все аксиомы симметричны: если заменить все $\vee$ на $\wedge$ и наоборот, а также все 0 на 1 и наоборот, то получится тоже аксиома.

Двойственность!

ассоциативность	$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$	$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
коммутативность	$a \vee b = b \vee a$	$a \wedge b = b \wedge a$
поглощение	$a \vee (a \wedge b) = a$	$a \wedge (a \vee b) = a$
тождество	$a \vee 0 = a$	$a \wedge 1 = a$
дистрибутивность	$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
дополнение	$a \vee \neg a = 1$	$a \wedge \neg a = 0$

Таблица: Аксиомы булевой алгебры

Заметим, что все аксиомы симметричны: если заменить все $\vee$ на $\wedge$ и наоборот, а также все 0 на 1 и наоборот, то получится тоже аксиома.

Обычно договариваются, что $0 \neq 1$, иначе получится вырожденная алгебра, состоящая из одного элемента.

Свойства

Следующие свойства легко доказываются простой проверкой:

- $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$ (закон де Моргана);

Свойства

Следующие свойства легко доказываются простой проверкой:

- $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$ (закон де Моргана);
- $\neg\neg x = x$ (двойное отрицание);

Свойства

Следующие свойства легко доказываются простой проверкой:

- $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$ (закон де Моргана);
- $\neg\neg x = x$ (двойное отрицание);
- Если $x \vee a = x$ для всех x, то $a = 0$ (единственность нуля);

Свойства

Следующие свойства легко доказываются простой проверкой:

- $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$ (закон де Моргана);
- $\neg\neg x = x$ (двойное отрицание);
- Если $x \vee a = x$ для всех x, то $a = 0$ (единственность нуля);
- $x \vee (x \wedge y) = x$ (поглощение);
- $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (ассоциативность).

Свойства

Следующие свойства легко доказываются простой проверкой:

- $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$ (закон де Моргана);
- $\neg\neg x = x$ (двойное отрицание);
- Если $x \vee a = x$ для всех x, то $a = 0$ (единственность нуля);
- $x \vee (x \wedge y) = x$ (поглощение);
- $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (ассоциативность).

Например, докажем единственность нуля.

□ Пусть $x \vee a = x$ для всех x. Тогда:

Свойства

Следующие свойства легко доказываются простой проверкой:

- $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$ (закон де Моргана);
- $\neg\neg x = x$ (двойное отрицание);
- Если $x \vee a = x$ для всех x, то $a = 0$ (единственность нуля);
- $x \vee (x \wedge y) = x$ (поглощение);
- $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (ассоциативность).

Например, докажем единственность нуля.

$\square$ Пусть $x \vee a = x$ для всех x. Тогда:

0

$= 0 \vee a$ (по условию)

$= a \vee 0$ (коммутативность)

a (тождество).

Свойства

Следующие свойства легко доказываются простой проверкой:

- $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$ (закон де Моргана);
- $\neg\neg x = x$ (двойное отрицание);
- Если $x \vee a = x$ для всех x, то $a = 0$ (единственность нуля);
- $x \vee (x \wedge y) = x$ (поглощение);
- $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (ассоциативность).

Например, докажем единственность нуля.

□ Пусть $x \vee a = x$ для всех x. Тогда:

0

$= 0 \vee a$ (по условию)

$= a \vee 0$ (коммутативность)

a (тождество).■

Упражнение: проверить остальные.

Примеры

1. Двухэлементная алгебра: множество $\{0, 1\}$ с операциями, заданными по таблицам истинности.

Примеры

1. Двухэлементная алгебра: множество $\{0, 1\}$ с операциями, заданными по таблицам истинности.
2. Алгебра множеств: пусть дано множество A. Рассмотрим множество всех его подмножеств $\mathcal{P}(A)$, на котором введём операции $\wedge = \cap$, $\vee = \cup$, $\neg S = A \setminus S$. Тогда оно будет булевой алгеброй.
3. Более общо: если мы выделим в $\mathcal{P}(A)$ произвольное подмножество, замкнутое относительно объединений, пересечений и дополнений, оно будет булевой алгеброй.

Порядок на элементах

Альтернативное описание даёт рассмотрение булевых алгебр как *упорядоченных* множеств.

Порядок на элементах

Альтернативное описание даёт рассмотрение булевых алгебр как *упорядоченных* множеств. У алгебры множеств есть естественное отношение порядка по вложению: $A \subseteq B$ тогда и только тогда, когда $A \cup B = B$. Обобщим его:

Порядок на элементах

Альтернативное описание даёт рассмотрение булевых алгебр как *упорядоченных* множеств. У алгебры множеств есть естественное отношение порядка по вложению: $A \subseteq B$ тогда и только тогда, когда $A \cup B = B$. Обобщим его:

Определение

Будем говорить, что в булевой алгебре X выполняется $a \leq b$, если $a = b \wedge a$. Эквивалентно, $a \vee b = b$.

Порядок на элементах

Альтернативное описание даёт рассмотрение булевых алгебр как *упорядоченных* множеств. У алгебры множеств есть естественное отношение порядка по вложению: $A \subseteq B$ тогда и только тогда, когда $A \cup B = B$. Обобщим его:

Определение

Будем говорить, что в булевой алгебре X выполняется $a \leq b$, если $a = b \wedge a$. Эквивалентно, $a \vee b = b$.

Получается частичный порядок на элементах алгебры, то есть отношение, для которого верно:

Порядок на элементах

Альтернативное описание даёт рассмотрение булевых алгебр как *упорядоченных* множеств. У алгебры множеств есть естественное отношение порядка по вложению: $A \subseteq B$ тогда и только тогда, когда $A \cup B = B$. Обобщим его:

Определение

Будем говорить, что в булевой алгебре X выполняется $a \leq b$, если $a = b \wedge a$. Эквивалентно, $a \vee b = b$.

Получается частичный порядок на элементах алгебры, то есть отношение, для которого верно:

- $a \leq a$ (рефлексивность);

Порядок на элементах

Альтернативное описание даёт рассмотрение булевых алгебр как *упорядоченных* множеств. У алгебры множеств есть естественное отношение порядка по вложению: $A \subseteq B$ тогда и только тогда, когда $A \cup B = B$. Обобщим его:

Определение

Будем говорить, что в булевой алгебре X выполняется $a \leq b$, если $a = b \wedge a$. Эквивалентно, $a \vee b = b$.

Получается частичный порядок на элементах алгебры, то есть отношение, для которого верно:

- $a \leq a$ (рефлексивность);
- Если $a \leq b$ и $b \leq a$, то $a = b$ (антисимметричность);

Порядок на элементах

Альтернативное описание даёт рассмотрение булевых алгебр как *упорядоченных* множеств. У алгебры множеств есть естественное отношение порядка по вложению: $A \subseteq B$ тогда и только тогда, когда $A \cup B = B$. Обобщим его:

Определение

Будем говорить, что в булевой алгебре X выполняется $a \leq b$, если $a = b \wedge a$. Эквивалентно, $a \vee b = b$.

Получается частичный порядок на элементах алгебры, то есть отношение, для которого верно:

- $a \leq a$ (рефлексивность);
- Если $a \leq b$ и $b \leq a$, то $a = b$ (антисимметричность);
- Если $a \leq b$ и $b \leq c$, то $a \leq c$ (транзитивность).

Что тогда такое все операции

- $a \leq a$ (рефлексивность);

Что тогда такое все операции

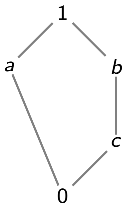
- $a \leq a$ (рефлексивность);
- Если $a \leq b$ и $b \leq a$, то $a = b$ (антисимметричность);

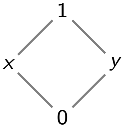
Что тогда такое все операции

- $a \leq a$ (рефлексивность);
- Если $a \leq b$ и $b \leq a$, то $a = b$ (антисимметричность);
- Если $a \leq b$ и $b \leq c$, то $a \leq c$ (транзитивность).

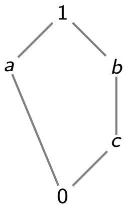
В таком случае, операции $\vee$ и $\wedge$ обретают понятное значение: это в точности наименьшая верхняя и наибольшая нижняя грани для пары элементов, соответственно.

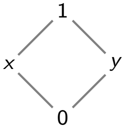
Не все подходят





Не все подходят





Только правая из диаграмм может изображать реальную булеву алгебру.

Альтернативное определение

Булева алгебра – это частичный порядок с операциями $\vee$ и $\wedge$ взятия наименьшей верхней и наибольшей нижней граней, соответственно, на которой введены дополнительно следующие операции:

- $a \to b$ – наибольший x такой, что $x \wedge a \leq b$;
- $\neg a = a \to 0$ – наибольший x такой, что $x \wedge a = 0$.

и выполнено, что $a \wedge b \leq c \Leftrightarrow a \leq b \to c$ и $\neg\neg a = a$.

Зачем нужны: альтернативная семантика логики высказываний

Пусть дана булева алгебра X. Взяв формулу логики высказываний, мы можем подставить в неё на место переменных элементы X и вычислить результат – тоже его элемент. Тем самым, всякая булева алгебра превращает формулы логики высказываний в функции из X^n в X.

Зачем нужны: альтернативная семантика логики высказываний

Пусть дана булева алгебра X. Взяв формулу логики высказываний, мы можем подставить в неё на место переменных элементы X и вычислить результат – тоже его элемент. Тем самым, всякая булева алгебра превращает формулы логики высказываний в функции из X^n в X.

Будем говорить, что формула истинна на алгебре, если при любых подстановках результат вычисления равен 1.

Оказывается:

Теорема

Формула φ общезначима в логике высказываний $\Leftrightarrow$ φ истинна на всех булевых алгебрах.

Зачем нужны: альтернативная семантика логики высказываний

Пусть дана булева алгебра X. Взяв формулу логики высказываний, мы можем подставить в неё на место переменных элементы X и вычислить результат – тоже его элемент. Тем самым, всякая булева алгебра превращает формулы логики высказываний в функции из X^n в X.

Будем говорить, что формула истинна на алгебре, если при любых подстановках результат вычисления равен 1.

Оказывается:

Теорема

Формула φ общезначима в логике высказываний $\Leftrightarrow$ φ истинна на всех булевых алгебрах.

$\square$ ($\Rightarrow$) В самом деле: всякая аксиома логики высказываний верна на всех булевых алгебрах, а правило MP сохраняет это. $\blacksquare$

Алгебра Линденбаума-Тарского

$\square$ ($\Leftarrow$) Рассмотрим одну конкретную алгебру и одну оценку. Её элементы – множества эквивалентных друг другу формул логики высказываний; $\wedge$ и $\vee$ определяются очевидным образом.

$[a] = \{\psi \mid a \equiv \psi\}$; $[a] \wedge [b] = [a \wedge b]$ и т. д.

Алгебра Линденбаума-Тарского

$\square$ ($\Leftarrow$) Рассмотрим одну конкретную алгебру и одну оценку. Её элементы – множества эквивалентных друг другу формул логики высказываний; $\wedge$ и $\vee$ определяются очевидным образом.

$[a] = \{\psi \mid a \equiv \psi\}$; $[a] \wedge [b] = [a \wedge b]$ и т. д.

Такая алгебра называется *алгеброй Линденбаума-Тарского*.

Алгебра Линденбаума-Тарского

□ (⇐) Рассмотрим одну конкретную алгебру и одну оценку. Её элементы – множества эквивалентных друг другу формул логики высказываний; $\wedge$ и $\vee$ определяются очевидным образом.

$[a] = \{\psi \mid a \equiv \psi\}$; $[a] \wedge [b] = [a \wedge b]$ и т. д.

Такая алгебра называется *алгеброй Линденбаума-Тарского*.

Оценка определяется просто: всякая переменная p получает значение $[p]$. Теперь по индукции легко доказывается: на этой алгебре значение 1 получают в точности формулы, общезначимые в логике высказываний.

Алгебра Линденбаума-Тарского

□ ($\Leftarrow$) Рассмотрим одну конкретную алгебру и одну оценку. Её элементы – множества эквивалентных друг другу формул логики высказываний; $\wedge$ и $\vee$ определяются очевидным образом.

$[a] = \{\psi \mid a \equiv \psi\}$; $[a] \wedge [b] = [a \wedge b]$ и т. д.

Такая алгебра называется *алгеброй Линденбаума-Тарского*.

Оценка определяется просто: всякая переменная p получает значение $[p]$. Теперь по индукции легко доказывается: на этой алгебре значение 1 получают в точности формулы, общезначимые в логике высказываний.

Итак, если формула φ верна на всех булевых алгебрах при всех оценках, но и на этой тоже, поэтому она общезначима. ■

Теорема Стоуна

Оказывается, что приведённый нами пример алгебры подмножеств в каком-то смысле исчерпывает все мыслимые булевы алгебры. Более точно,

Теорема (Теорема Стоуна)

Всякая булева алгебра X изоморфна подалгебре алгебры всех подмножеств некоторого множества.

Теорема Стоуна

Оказывается, что приведённый нами пример алгебры подмножеств в каком-то смысле исчерпывает все мыслимые булевы алгебры. Более точно,

Теорема (Теорема Стоуна)

Всякая булева алгебра X изоморфна подалгебре алгебры всех подмножеств некоторого множества.

Мы построим это множество и укажем, какие из подмножеств брать, напрямую.

Ультрафильтры

Определение

Ультрафильтр на булевой алгебре X – это подмножество $F \subseteq X$, удовлетворяющее следующим условиям:

Ультрафильтры

Определение

Ультрафильтр на булевой алгебре X – это подмножество $F \subseteq X$, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $0 \notin F$, $1 \in F$;
2. *замкнутость относительно конечных пересечений:* $a \in F, b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F$;
3. *замкнутость вверх:* $a \in F$, $b \geq a \Rightarrow b \in F$;
4. *полнота: для всякой* p, *либо* p, *либо* $\neg p$ *принадлежит* F.

Множество, удовлетворяющее условиям (1)–(3), называется *фильтром*.

Теорема об ультрафильтре

Теорема

На любой булевой алгебре ультрафильтр существует; более того, если множество $K \subseteq X$ таково, что все конечные конъюнкции его элементов не равны 0, то оно расширяется до ультрафильтра.

□ Условия фильтра выполнить нетрудно. Скажем, множество $\{a \mid a \geq b\}$ для некоторого $b \in X, b \neq 0$ годится.

Теорема об ультрафильтре

Теорема

На любой булевой алгебре ультрафильтр существует; более того, если множество $K \subseteq X$ таково, что все конечные конъюнкции его элементов не равны 0, то оно расширяется до ультрафильтра.

□ Условия фильтра выполнить нетрудно. Скажем, множество $\{a \mid a \geq b\}$ для некоторого $b \in X, b \neq 0$ годится.

Если дано K из условия, достаточно замкнуть его сперва относительно конечных пересечений, а затем вверх, чтобы получить фильтр.

Теорема об ультрафильтре

Теорема

На любой булевой алгебре ультрафильтр существует; более того, если множество $K \subseteq X$ таково, что все конечные конъюнкции его элементов не равны 0, то оно расширяется до ультрафильтра.

□ Условия фильтра выполнить нетрудно. Скажем, множество $\{a \mid a \geq b\}$ для некоторого $b \in X, b \neq 0$ годится.

Если дано K из условия, достаточно замкнуть его сперва относительно конечных пересечений, а затем вверх, чтобы получить фильтр.

Заметим, что условие (4) эквивалентно тому, что фильтр максимальный по включению и больше не расширяется (иначе бы в нём оказались какие-то p и $\neg p$, а, значит, и их конъюнкция, то есть 0).

Зафиксируем этот фильтр и рассмотрим все фильтры, которые его расширяют. Теперь применим к ним лемму Цорна. ■

Доказательство теоремы Стоуна

Теперь начнём строить вложение. Подмножества какого множества нам нужно рассматривать?

Доказательство теоремы Стоуна

Теперь начнём строить вложение. Подмножества какого множества нам нужно рассматривать?

Пусть S – множество всех ультрафильтров на X.

Доказательство теоремы Стоуна

Теперь начнём строить вложение. Подмножества какого множества нам нужно рассматривать?

Пусть S – множество всех ультрафильтров на X.

Теперь положим $f : a \in X \mapsto \{F \mid a \in F\}$ – переводим каждый элемент в множество тех ультрафильтров, в которых он есть.

Доказательство теоремы Стоуна

Теперь начнём строить вложение. Подмножества какого множества нам нужно рассматривать?

Пусть S – множество всех ультрафильтров на X.

Теперь положим $f\colon a \in X \mapsto \{F \mid a \in F\}$ – переводим каждый элемент в множество тех ультрафильтров, в которых он есть.

Проверим, что это отображение сохраняет $\wedge, \vee, \neg$. В самом деле,

$F \in f(a \wedge b) \Leftrightarrow a \in F$ и $b \in F \Leftrightarrow F \in f(a)$ и $f \in f(b) \Leftrightarrow F \in f(a) \cap f(b)$;

$F \in f(a \vee b) \Leftrightarrow a \in F$ или $b \in F \Leftrightarrow F \in f(a)$ или $f \in f(b) \Leftrightarrow F \in f(a) \cup f(b)$;

$F \in f(\neg a) \Leftrightarrow \neg a \in F \Leftrightarrow a \notin F \Leftrightarrow F \notin f(a) \Leftrightarrow F \in \overline{(f(a))}$.

Доказательство теоремы Стоуна

Теперь начнём строить вложение. Подмножества какого множества нам нужно рассматривать?

Пусть S – множество всех ультрафильтров на X.

Теперь положим $f\colon a \in X \mapsto \{F \mid a \in F\}$ – переводим каждый элемент в множество тех ультрафильтров, в которых он есть.

Проверим, что это отображение сохраняет $\wedge, \vee, \neg$. В самом деле,

$F \in f(a \wedge b) \Leftrightarrow a \in F$ и $b \in F \Leftrightarrow F \in f(a)$ и $f \in f(b) \Leftrightarrow F \in f(a) \cap f(b)$;

$F \in f(a \vee b) \Leftrightarrow a \in F$ или $b \in F \Leftrightarrow F \in f(a)$ или $f \in f(b) \Leftrightarrow F \in f(a) \cup f(b)$;

$F \in f(\neg a) \Leftrightarrow \neg a \in F \Leftrightarrow a \notin F \Leftrightarrow F \notin f(a) \Leftrightarrow F \in \overline{(f(a))}$.

Проверим, что оно инъективно.

Пусть $a \neq b \in X$. Например, пусть $\neg(a \leq b)$. Это означает, что $a \wedge \neg b \neq 0$. Значит, множество $\{a, \neg b\}$ не достигает нуля конечными пересечениями. Расширим его до ультрафильтра. В нём есть a и нет b.

А что аксиома выбора?

Утверждение, что всякий фильтр содержится в ультрафильтре, доказывается с помощью леммы Цорна. Но эквивалентно ли оно аксиоме выбора?

Нет, оно слабее. Но его достаточно, чтобы доказать:

Существуют множества, неизмеримые по Лебегу.

Два базиса одного линейного пространства равномощны.

Теорема де Брёйна-Эрдёша: хроматическое число бесконечного графа, если это число конечно, равно наибольшему хроматическому числу среди всех его конечных подграфов.

Спасибо за внимание!