Неполный список типовых задач по курсу
«Введение в математическую логику и теорию алгоритмов»
(мехмат МГУ, осень 2020)

На экзамене нужно уметь решать задачи, основанные на теории, пройденной в курсе, например следующие.

Задача 1. Выведите из аксиом теории множеств Цермело—Френкеля, что для любого множества существует множество всех его двухэлементных подмножеств.

Задача 2. Какие из следующих упорядоченных множеств изоморфны: 1) $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, 2) $\mathbb{N}\times(\mathbb{N}+\mathbb{N})$, 3) $(\mathbb{N}+\mathbb{N})\times\mathbb{N}$, 4) $\mathbb{N}\times(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$, 5) $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times\mathbb{N}$, 6) $\mathbb{Q}$, 7) $\mathbb{Q}+\mathbb{Q}$?

Задача 3. Существуют ли такие неизоморфные бесконечные вполне упорядоченные множества X и Y, что упорядоченные множества $X+Y$ и $Y+X$ изоморфны?

Задача 4. Можно ли определить двуместное отношение $x=y+2$ на множестве целых чисел в сигнатуре $\{=,<\}$?

Задача 5. Являются ли элементарно эквивалентными модели $\langle\mathbb{Q},=,<\rangle$ и $\langle\mathbb{R},=,<\rangle$?

Задача 6. Привести к предварённой нормальной форме формулу
$\forall x\,(\neg R(x,x)\wedge\forall y\,(R(x,y)\to\exists z\,R(x,z)\wedge\exists z R(z,y)))$.

Задача 7. Является ли тождественно истинной формула
$\neg\forall x\,(\neg R(x,x)\wedge\exists z\,R(z,x)\wedge\forall y\,\exists z\,(R(x,z)\wedge R(z,y)\vee\neg R(x,y)))$?

Задача 8. Является ли тождественно истинной формула
$\exists z\,\forall x\,(Q(z,z,z)\wedge\forall u\,\forall y\,(Q(u,x,y)\leftrightarrow Q(u,z,z))\to\forall y\,Q(z,x,y))$

Задача 9. Равносильны ли формулы $\neg\exists u\,(R(a_1,u)\wedge R(u,a_2)\vee R(a_2,u)\wedge R(u,a_3))$ и
$\neg\exists u\,(R(a_1,u)\wedge R(u,a_2))\wedge\neg\exists v\,(R(a_2,v)\wedge R(v,a_3))$?

Задача 10. Равносильны ли формулы $\forall x\,(\forall y\,R(x,y)\leftrightarrow\forall z\,\neg R(z,x))$ и $\forall x\,(\exists y\,R(x,y)\leftrightarrow\exists z\,\neg R(z,x))$

Задача 11. Равносильны ли формулы $\neg\exists y\,\neg R(y,y)$ и $\forall x\,\forall y\,R(x,y)\leftrightarrow\forall x\,\forall y\,(\forall z\,R(z,z)\to R(x,y))$

Задача 12. Построить вывод формулы $\exists y\,Q(y)$ из формул $\forall y\,(P(y)\to Q(y))$ и $\exists z\,P(z)$ в исчислении предикатов.

Задача 13. Существует ли в языке теории групп система аксиом, нормальными моделями которой являются в точности все группы порядка 6?

Задача 14. Существует ли в языке теории групп система аксиом, нормальными моделями которой являются в точности все конечные группы?

Задача 15. Пусть T — теория первого порядка с равенством. Пусть для каждого натурального числа n у теории T имеется нормальная модель мощности не меньше 2^n. Следует ли из этого, что у теории T имеется бесконечная нормальная модель?

Задача 16. Существуют ли такие разрешимые множества A и B, что множество $(A\cup B)\setminus(A\cap B)$ не является перечислимым?

Задача 17. Пусть $A\subseteq\mathbb{N}$. Доказать, что A бесконечно и разрешимо тогда и только тогда, когда A является множеством значений некоторой всюду определённой вычислимой функции f, для которой $\forall x\,f(x)\geqslant x$.

Задача 18. Пусть $\Sigma=\{a,b\}$. Существует ли такая тотальная вычислимая функция f из Σ^+ в Σ^+, что её множество значений неразрешимо и $\forall u,v\in\Sigma^+\,\exists z\in\Sigma^+\,f(uv)=f(u)z$?

Задача 19. Существует ли у множества $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ перечислимое подмножество с неперечислимой первой проекцией?

Задача 20. Разрешимо ли множество $\{i\in\mathbb{N}:\varphi_i(5)\text{ не определено}\}$?

Задача 21. Перечислимо ли множество $\{i\in\mathbb{N}:\neg\exists x(\Phi(i,x)=x)\}$, где Φ — главная универсальная функция для класса всех одноместных вычислимых функций из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$?