Вычислимость
лекция 16

Лев Дмитриевич Беклемишев
http://lpcs.math.msu.su/vml2020

`lbekl@yandex.ru`

18.12.2020

Вычислимая функция, не продолжаемая до вычислимой тотальной

Пусть $f, g : X \to Y$ — частичные функции.

Опр.

g продолжает f, если $f \subseteq g$, то есть

$dom(f) \subseteq dom(g)$ и $\forall x{\in}dom(f)\ f(x) = g(x)$.

Теорема.

Найдётся такая $f \in \mathrm{Com}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$, *что никакая* $g \in \mathrm{TCom}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ *не продолжает* f.

Доказательство.

Диагональный метод Кантора.

Пусть $f(x) \simeq F(x, x) + 1$, где F — универсальная функция.

Функция f вычислима, т.к. такова F.

Допустим $f \subseteq g$ и $g \in \mathrm{TCom}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$. Тогда найдётся $i \in \mathbb{N}$

$$\forall x{\in}\mathbb{N}\ g(x) \simeq F(i, x).$$

Т.к. $!g(i)$, получаем

$$F(i, i) = g(i) = F(i, i) + 1,$$

противоречие.

Упражнение

Построить вычислимую функцию $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, *не имеющую тотального вычислимого продолжения.*

Перечислимое неразрешимое множество

Положим $K \rightleftharpoons dom(f)$, где f из предыдущей теоремы, т.е. $K = \{x \in \mathbb{N} : !F(x,x)\}$.

Теорема.

$K \subseteq \mathbb{N}$ *перечислимо, но не разрешимо.*

Доказательство.

K перечислимо, поскольку K есть область определения вычислимой функции f.

Допустим K разрешимо. Тогда функция

$$g(x) \rightleftharpoons \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in K; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

вычислима и является продолжением f на всё $\mathbb{N}$.

Проблема остановки

Проблема = массовая проблема

Пусть фиксирован алфавит Δ и $\# \notin \Delta$.

Задача: по данной программе (коду машины Тьюринга) M и исходным данным $x \in \Delta^+$ узнать, завершает ли работу M на входе x.

Теорема.

Проблема остановки алгоритмически неразрешима.

Доказательство.

В случае разрешимости проблемы остановки мы могли бы построить разрешающий алг. для K:

- По данному x вычислить $y = \mathrm{word}_{\Pi}(x)$.
- Проверить, является ли y кодом МТ с алфавитом, содержащим Δ. Если нет, то $x \notin K$.
- Иначе проверить, завершает ли работу машина M с кодом y на входе $\overline{x}$. Если да, то $x \in K$, иначе $x \notin K$.

Установленные факты

- Универсальная вычислимая функция $F(e, x)$.
- Частичная вычислимая $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, не продолжаемая до тотальной вычислимой:

$$f(x) \rightleftharpoons \begin{cases} 1, & \text{если } F(x, x) = 0; \\ 0, & \text{если } !F(x, x) \neq 0; \\ \text{неопр.}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- $K \rightleftharpoons \{x \in \mathbb{N} : !F(x, x)\}$ перечислимое, неразрешимое.

Пара неотделимых перечислимых множеств

Опр.

Пара множеств $X, Y \subseteq \mathbb{N}$ *неотделима*, если

- $X \cap Y = \varnothing$
- не существует *разрешимого* множества $C \subseteq \mathbb{N}$ такого,что $X \subseteq C$ и $Y \cap C = \varnothing$.

Теорема.

Существует неотделимая пара перечислимых множеств.

Доказательство.

Пусть $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ — вычислимая функция без тотального вычислимого продолжения. Положим $X \leftrightharpoons \{x \in \mathbb{N} : f(x) = 0\}$ и $Y \leftrightharpoons \{x \in \mathbb{N} : f(x) = 1\}$.

По теореме о графике X, Y перечислимы.

Если разрешимое C отделяет X и Y, то функция

$$g(x) \leftrightharpoons \begin{cases} 0, & \text{если } x \in C; \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

продолжает f на всё $\mathbb{N}$.

Главные универсальные функции

Опр.

Вычислимая универсальная функция $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ называется *главной*, если для любой вычислимой $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ найдётся тотальная вычислимая функция $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что

$$\forall e, x \; g(e, x) \simeq F(s(e), x).$$

Теорема.

Вычислимая универсальная функция $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, построенная по универсальной машине Тьюринга U, является главной.

Замечание.
Вычислимую функцию $g(e, x)$ можно понимать как (возможно, не универсальный) язык программирования, где e — программа вычисления функции $x \mapsto g(e, x)$.

Функция s есть *интерпретатор*, сопоставляющий программе e языка g машину Тьюринга $s(e)$, вычисляющую ту же функцию.

Доказательство.

Пусть $\Delta = \{1\}$ и МТ M вычисляет $g(e,x)$ в унарной записи, то есть $M_\Delta(\overline{e}\,0\,\overline{x}) \simeq \overline{g(e,x)}$.

Сопоставим МТ M машину $M[n]$, которая для данного входа $\overline{x}$ выписывает на ленте $\overline{n}\,0\,\overline{x}$, а далее работает как M. Преобразование $n \mapsto Code(M[n])$ является тотальной вычислимой функцией.

Имеем

$$M_\Delta(\overline{e}\,0\,\overline{x}) \simeq M[e]_\Delta(\overline{x}) \simeq U_\Delta(Code(M[e])\$\overline{x}).$$

Вспомним, что $F(i,n) \rightleftharpoons |U_\Delta(\mathrm{word}_\Pi(i)\$\overline{n})| - 1.$

Нам нужно получить $g(e,x) \simeq F(s(e),x)$, что равносильно

$$\overline{g(e,x)} \simeq U_\Delta(\mathrm{word}_\Pi(s(e))\$\overline{x}).$$

То есть, достаточно положить:

$$s(e) = \mathrm{word}_\Pi^{-1}(Code(M[e])).$$

Теорема Райса–Успенского

Какие свойства вычислимых функций распознаваемы по программе?

Примеры практически интересных свойств частичных функций f:

- $\forall x \; !f(x)$ (тотальность);
- $f(x_0) = y_0$, где x_0, y_0 фиксированы;
- $f = g_0$, где функция g_0 фиксирована;
- «вычисление $f(x)$ на некотором x приводит к стиранию всех данных на HD компьютера».

Опр.

Пусть фиксирована универсальная вычислимая функция F. Обозначим через φ_e частичную функцию с индексом e, т.е. $\varphi_e(x) \simeq F(e, x)$.

Опр.

Нетривиальным свойством вычислимых функций называем любое подмножество $\mathcal{C} \subset \mathrm{Com}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ такое, что $\mathcal{C} \neq \varnothing$ и $\mathcal{C} \neq \mathrm{Com}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$.

С каждым свойством $\mathcal{C}$ вычислимых функций связывается множество всех программ, вычисляющих функции со свойством $\mathcal{C}$, то есть множество $I_{\mathcal{C}} \rightleftharpoons \{e \in \mathbb{N} : \varphi_e \in \mathcal{C}\}$.

Теорема.

Если $\mathcal{C}$ — нетривиальное свойство вычислимых функций, то множество $\{e \in \mathbb{N} : \varphi_e \in \mathcal{C}\}$ неразрешимо.

Доказательство.

- Можно считать, что нигде не определённая функция ζ не обладает свойством $\mathcal{C}$ — иначе заменим $\mathcal{C}$ на его дополнение.
- Т.к. $\mathcal{C} \neq \varnothing$, фиксируем вычислимую функцию $g_0 \in \mathcal{C}$.

- Построим тотальную вычислимую функцию $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такую, что для всех $x \in \mathbb{N}$

$$x \in K \iff f(x) \in I_{\mathcal{C}}.$$

- Если бы $I_{\mathcal{C}} \rightleftharpoons \{e \in \mathbb{N} : \varphi_e \in \mathcal{C}\}$ было разрешимо, то мы получили бы следующий разрешающий алгоритм для K: *для данного x вычислить $y = f(x)$ и проверить $y \in I_{\mathcal{C}}$.*

Вычисляем $g(e, x)$ в соответствии со следующим алгоритмом:

- вычислить $\varphi_e(e)$;
- если $!\varphi_e(e)$, очистить ленту, а затем вычислить $g_0(x)$.

По свойству главности получаем тотальную вычислимую функцию f такую, что

$$\forall e, x\ \varphi_{f(e)}(x) \simeq g(e, x).$$

Тогда имеем:

- Если $e \in K$, то $\varphi_{f(e)}(x) \simeq g_0(x)$;
- Если $e \notin K$, то $\varphi_{f(e)} = \zeta$.

Отсюда $e \in K \iff \varphi_{f(e)} \in \mathcal{C} \iff f(e) \in I_{\mathcal{C}}$.

Следствие.

Следующие свойства вычислимых функций не распознаваемы по программе:

- тотальность,
- ограниченность,
- конечность области определения, и т.д.

Замечание.

Такие свойства как

- «вычисление $f(0)$ завершается менее чем за 100 шагов»;
- «программа f содержит менее 100 символов» (при фиксированном алфавите)

являются разрешимыми свойствами программ. Они не соответствуют никакому классу частичных *функций*.