Вычислимость
лекция 15

Лев Дмитриевич Беклемишев
http://lpcs.math.msu.su/vml2020

lbekl@yandex.ru

11.12.2020

Теорема Поста

Теорема.

$A \subseteq \mathbb{N}$ *разрешимо* $\iff$ A *и* $\mathbb{N} \setminus A$ *перечислимы.*

Доказательство.

Пусть определённые всюду функции f и g перечисляют A и $\mathbb{N} \setminus A$, соответственно. Вычисляем $f(0), g(0), f(1), g(1), f(2), g(2), \ldots$ до тех пор, пока не встретим данный нам x.

Теорема о графике

Теорема.

$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *вычислима* $\iff$ *множество* $G_f \rightleftharpoons \{\langle x,y\rangle : f(x)=y\}$ *перечислимо.*

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ Проверяем $\langle x,y\rangle\in G_f$ вычисляя $f(x)$.

$(\Leftarrow)$ Вычисляем $f(x)$ перебирая все возможные пары $\langle x,y\rangle$ и проверяя их на принадлежность G_f.

Разрешимость и перечислимость теорий

Опр.

Теория T (в конечной сигнатуре) *эффективно аксиоматизируема* $\iff$ множество аксиом T разрешимо.

Опр.

Теория T *разрешима*, если множество теорем T разрешимо.

Теорема Крейга

Теорема.

Теория T эфф. аксиоматизируема $\iff$ множество теорем T перечислимо.

Доказательство.

($\Rightarrow$) Порождаем все возможные выводы из аксиом T.

($\Leftarrow$) Пусть $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ — перечисление теорем T. Тогда множество формул $A_0, A_0 \wedge A_1, A_0 \wedge A_1 \wedge A_2, \dots$ разрешимо и задаёт эквивалентную теорию.

Теорема.

Полная эфф. аксиоматизируемая теория разрешима.

Полные эфф. аксиоматизируемые теории:

- Элементарная геометрия (G1-G11). $Th(\mathbb{R}^2; =, \cong, B)$
- Теория алгебраически замкнутых полей характеристики 0. $Th(\mathbb{C}; =, +, \cdot, 0, 1)$
- Теория плотных линейных порядков без первого и последнего элементов. $Th(\mathbb{Q}; =, <)$

Кодирование машин Тьюринга

Опр.

Машина $M = \langle Q, \Sigma, P, q_0, q_1 \rangle$ задаётся

- $Q = \{q_0, \dots, q_s\}$ — внутр. состояния;
- $\Sigma = \{a_0, \dots, a_r\}$ — рабочий алфавит;
- $P = \{p_1, \dots, p_{s(r+1)}\}$ — набор команд.

q_1 — нач., q_0 — кон., $a_0 = \#$ — пробел.

Кодирование Q *и* Σ

Опр.

Алфавит программ есть $\Pi \rightleftharpoons \{\to, L, N, R, q, a, 1\}$.

Сопоставим элементам Q и Σ следующие коды в алфавите Π:
$q_i \longmapsto q1^i; \quad a_j \longmapsto a1^j.$

Опр.

Слово $x \in \Sigma^*$ кодируется конкатенацией $Code(x)$ кодов всех его букв, например $Code(a_2 a_0 a_1) = a11aa1$.

Коды команд

Опр.

Код команды $q_i a_k \to q_j a_l \nu$, где $\nu \in \{L, N, R\}$, есть слово $q1^i a1^k \to q1^j a1^l \nu$ в алфавите Π.

Код команды $p \in P$ обозначим $Code(p)$.

Коды машин

Опр.

Код машины M есть конкатенация кодов всех её команд, то есть $Code(M) \rightleftharpoons Code(p_1) \ldots Code(p_{s(r+1)})$.

Утверждение.

Отображение $M \longmapsto Code(M)$ инъективно.

В частности, по $Code(M)$ однозначно восстанавливаются рабочий алфавит, множество внутренних состояний, команды и т.д.

Утверждение.

Множество кодов всевозможных машин Тьюринга (выбранного нами формата) есть разрешимое подмножество Π^*.

Универсальная машина Тьюринга

Опр.

Универсальная машина U_Δ с рабочим алфавитом, содержащим $\Pi \cup \Delta \cup \{\$\}$, для любой МТ M и слова $x \in \Delta^+$ (чисто) вычисляет результат работы машины M на входе x, то есть частичную функцию

$$Code(M)\$x \longmapsto M_\Delta(x).$$

Другими словами:

- Если U_Δ начинает работу в конфигурации $q_1 Code(M)\$x$ для $x \in \Delta^+$, то заключительная конфигурация $q_0 M_\Delta(x)$;
- Иначе U_Δ зацикливается.

Алгоритм работы машины U_Δ:

- Читаем входное слово вплоть до первого пробела и проверяем, что оно имеет вид $Code(M)\$x$ для $x \in \Delta^+$. Если нет, зацикливаемся.
- Эмулируем работу M на входе x, пользуясь частью ленты справа от $\$$ для записи кодов конфигураций M.

- В случае завершения работы M на входе x с результатом y выделяем слово $Code(y)$ из кода заключительной конфигурации M.
- Преобразуем $Code(y)$ в y.

Универсальные функции

Опр.

$\mathrm{Com}(X, Y)$ есть множество всех частичных вычислимых функций из X в Y.

Опр.

$\mathrm{TCom}(X, Y)$ есть множество всех тотальных (всюду определённых) вычислимых функций из X в Y.

Условное равенство

Пусть f, g — частичные функции.

Опр.

$f(x) \simeq g(x)$ означает, что либо значения $f(x)$ и $g(x)$ оба не определены, либо определены и $f(x) = g(x)$.

Пример.

$x \cdot 1/x \simeq 1/x \cdot x$.

Пример.

$U_\Delta(Code(M)\$x) \simeq M_\Delta(x)$.

Пусть $\mathcal{F}$ — счётное семейство част. функций $f : X \to Y$, например $\mathcal{F} = \mathrm{Com}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$.

Опр.

Универсальной функцией для $\mathcal{F}$ называем такую функцию $F : \mathbb{N} \times X \to Y$, что

- Для любого $e \in \mathbb{N}$ функция $f(x) \rightleftharpoons F(e, x)$ принадлежит $\mathcal{F}$.
- $\forall f {\in} \mathcal{F}\ \exists e {\in} \mathbb{N}\ \forall x {\in} X\ \ f(x) \simeq F(e, x)$.

Замечание.

- Универсальная функция F существует для любого счётного семейства $\mathcal{F}$.
- F определяет некоторую нумерацию $\mathcal{F}$: $\mathcal{F} = \{f_0(x), f_1(x), \dots\}$, где $f_i(x) \rightleftharpoons F(i, x)$.

Опр.

Число i называется *индексом* функции f_i относительно данной универсальной функции F.

Теорема.

Семейство $\mathrm{Com}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ обладает вычислимой универсальной функцией $F \in \mathrm{Com}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{N})$.

Доказательство.

Пусть $\Delta = \{1\}$. Обозначим $\overline{n} \rightleftharpoons 11\ldots1$ ($n+1$ раз). Заметим, что $|\overline{n}| = n+1$.

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ вычислима $\iff$ вычислима функция $\overline{f} : \Delta^+ \to \Delta^+$, определяемая по формуле $\overline{f}(\overline{n}) \rightleftharpoons \overline{f(n)}$.

Пусть M вычисляет $\overline{f}$, то есть

$$\forall x \in \Delta^+ \ M_\Delta(x) \simeq \overline{f}(x).$$

Рассмотрим выч. биекцию $\mathrm{word}_\Pi : \mathbb{N} \to \Pi^*$. Для некоторого $i \in \mathbb{N}$ имеем $Code(M) = \mathrm{word}_\Pi(i)$. Значит, для всех $x \in \Delta^+$

$$\overline{f}(x) \simeq M_\Delta(x) \simeq U_\Delta(\mathrm{word}_\Pi(i)\$x).$$

В качестве универсальной функции $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ возьмём

$$F(i, n) \rightleftharpoons |U_{\Delta}(\mathrm{word}_{\Pi}(i)\$\overline{n})| - 1.$$

Замечание.

Аналогично, для каждого k строятся вычислимые универсальные функции для классов $\mathrm{Com}(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$, обозначаемые F^k.