# *Логика предикатов*
# *лекция 11*

Лев Дмитриевич Беклемишев
http://lpcs.math.msu.su/vml2020

lbekl@yandex.ru

13.11.2020

# *Теории*

*Опр.*

***Теорией*** сигнатуры $\Sigma$ называем произвольное множество $T$ замкнутых формул языка $\mathcal{L}_\Sigma$. Элементы $A \in T$ называем ***нелогическими аксиомами*** $T$.

*Пример.*

Теория отношения эквивалентности:

- $\forall x\, R(x, x)$;
- $\forall x, y\, (R(x, y) \to R(y, x))$;
- $\forall x, y, z\, (R(x, y) \wedge R(y, z) \to R(x, z))$.

# *Модель теории*

*Опр.*

Модель $(M; \Sigma)$ есть *модель теории* $T$ (обозначение $M \models T$), если для любой $A \in T$ $M \models A$.

*Пример.*

$R$ есть отношение эквивалентности на множестве $M$, если и только если $(M; R) \models T$, где $T$ — теория отношения эквивалентности.

*Пример.*

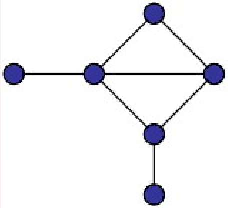
Модель $(M;<)$ есть *строгий частичный порядок*, если в $(M;<)$ истинны следующие предложения:

1. $\forall x, y, z\,(x < y \wedge y < z \to x < z)$
2. $\forall x\, \neg\, x < x$

*Пример.*

*Простой граф* — это модель вида $(V; E)$, где $E$ — бинарный предикат смежности, причём отношение $E$ симметрично и иррефлексивно:

- $\forall x \neg E(x, x)$
- $\forall x, y \, (E(x, y) \to E(y, x))$



*Пример.*

$(M; =, \cdot, 1)$ есть *группа*, если $M$ есть модель следующей теории (при условии, что «$=$» в $M$ понимается как равенство):

1. $\forall x, y, z \;\; x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
2. $\forall x \, (1 \cdot x = x \wedge x \cdot 1 = x)$
3. $\forall x \exists y \, (x \cdot y = 1 \wedge y \cdot x = 1)$

# *Равенство*

Пусть $\Sigma$ — сигнатура, содержащая выделенный предикатный символ $=$.

*Опр.*

*Нормальной моделью* называем модель $(M; \Sigma)$, в которой $=$ интерпретируется как равенство $\{\langle x, x\rangle \mid x \in M\}$.

*Опр.*

Аксиомы равенства для $\Sigma$ — универсальные замыкания следующих формул:

1. аксиомы отношения эквивалентности для $=$
2. $$a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \dots \wedge a_n = b_n \to (P(a_1, \dots, a_n) \leftrightarrow P(b_1, \dots, b_n))$$
3. $$a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \dots \wedge a_n = b_n \to (f(a_1, \dots, a_n) = f(b_1, \dots, b_n))$$

для всех $f \in \mathrm{Func}_\Sigma$ and $P \in \mathrm{Pred}_\Sigma$.

*Предложение.*

*Если $(M; \Sigma)$ — нормальная модель, то в $M$ истинны все аксиомы равенства.*

*Опр.*

*Теорией с равенством* называем теорию сигнатуры $\Sigma$ с равенством, содержащую все аксиомы равенства.

*Теорема.*

*Пусть $T$ — теория с равенством. Если $T$ выполнима, то $T$ имеет нормальную модель.*

*Доказательство.*

Пусть $M \models T$. Предикат $=_M$ есть отношение эквивалентности на $M$. Положим $M' \rightleftharpoons M/{=_M}$ — множество классов эквивалентности и $\varphi : M \to M'$ сопоставляет любому $x \in M$ его класс $\varphi(x) \in M'$.

Интерпретируем предикатные и функц. символы в $M'$:
$P_{M'}(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) \overset{\text{def}}{\iff} P_M(x_1, \ldots, x_n)$;
$f_{M'}(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) := \varphi(f_M(x_1, \ldots, x_n))$.

В силу аксиом равенства в $M$, определение корректно и $M'$ — нормальная модель.

Индукцией по построению формулы $A$ проверяем

$$M \vDash A[x_1, \ldots, x_n] \iff M' \vDash A[\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)].$$

Отсюда следует $M' \vDash T$.

# Формальная арифметика Пеано

Сигнатура $\Sigma = \{0,\ S,\ +,\ \cdot,\ =\}$.

1. аксиомы равенства для $\Sigma$;
2. $\neg S(a) = 0, \quad S(a) = S(b) \to a = b$,
3. $a + 0 = a, \quad a + S(b) = S(a + b)$,
4. $a \cdot 0 = 0, \quad a \cdot S(b) = a \cdot b + a$,
5. (Схема аксиом индукции)

   $A[a/0] \wedge \forall x\,(A[a/x] \to A[a/S(x)]) \to \forall x\, A[a/x]$,

   для любой формулы $A$.

# *Теория множеств ZFC*

Сигнатура $\Sigma = \{\in\}$.
Равенство $a \approx b$ понимаем как сокращение $\forall x\, (x \in a \leftrightarrow x \in b)$.

1. (Равенство) $a \approx b \to \forall z\, (a \in z \leftrightarrow b \in z)$
2. (Пара) $\exists z\, \forall x\, (x \in z \leftrightarrow (x \approx a \vee x \approx b))$
3. (Объединение) $\exists z\, \forall x\, (x \in z \leftrightarrow \exists y\, (x \in y \wedge y \in a))$
4. (Степень) $\exists z\, \forall x\, (x \in z \leftrightarrow \forall y\, (y \in x \to y \in a))$
5. (Схема выделения) $\exists z\, \forall x\, (x \in z \leftrightarrow (x \in a \wedge \varphi[b/x]))$ для всех формул $\varphi$ сигнатуры $\Sigma$
6. (Бесконечность) $\exists z\, (\varnothing \in z \wedge \forall x\, (x \in z \to x \cup \{x\} \in z))$
7. (Регулярность) $\exists z\, (z \in a \wedge \forall x\, (x \in a \to x \notin z))$
8. (Схема подстановки)
9. (Аксиома выбора)

# Элементарная геометрия

Аксиоматика Тарского:

$G1.$ $ab \cong ba$

$G2.$ $ab \cong pq \wedge ab \cong rs \to pq \cong rs$

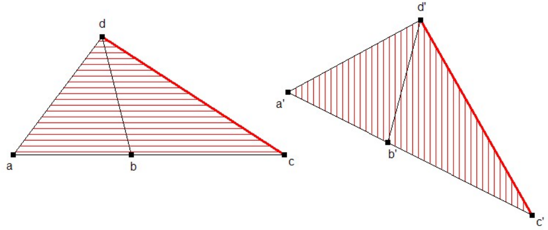
$G3.$ $ab \cong cc \to a = b$

$G4.$ $Babd \wedge Bbcd \to Babc$

$G5.$ $\exists x(Bqax \wedge ax \cong bc)$

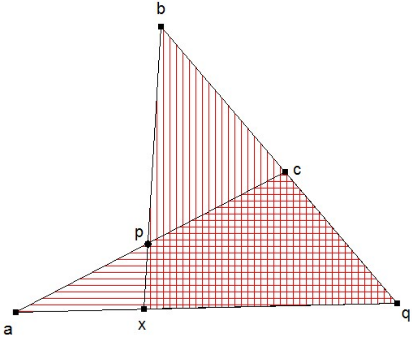
$G6.$ (пять отрезков)

$$(a \neq b \wedge Babc \wedge Ba'b'c' \wedge ab \cong a'b' \wedge bc \cong b'c' \\ \wedge ad \cong a'd' \wedge bd \cong b'd') \to cd \cong c'd'$$



*G7.* (аксиома Паша)

$Bapc \wedge Bqcb \to \exists x\,(Baxq \wedge Bbpx)$

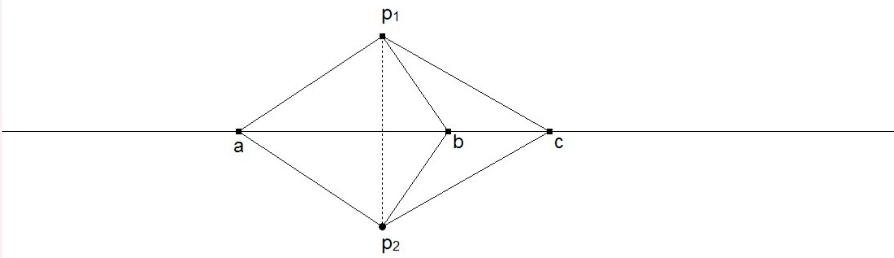


## Аксиомы размерности

G8. $\exists x, y, z\, (\neg Bxyz \wedge \neg Byzx \wedge \neg Bzxy)$

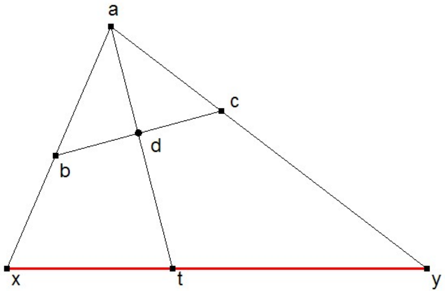
G9. $(dim \leq 2)$

$(p_1 \neq p_2 \wedge ap_1 \cong ap_2 \wedge bp_1 \cong bp_2 \wedge cp_1 \cong cp_2) \to$
$a \in bc$



$G10.$ (аксиома Евклида)

$Badt \wedge Bbdc \wedge a \neq d \to \exists x, y\, (Babx \wedge Bacy \wedge Bytx)$



*G11.* (схема аксиом непрерывности)

$$\exists u \forall x, y\, (C[a/x] \wedge D[a/y] \to Buxy) \to \\ \exists v \forall x, y\, (C[a/x] \wedge D[a/y] \to Bxvy)$$

Здесь $x, y, u, v$ не входят в $C$, $D$.

*G11′.* (аксиома непрерывности 2-го порядка)

$$\forall X, Y\, (\exists u \forall x, y\, (x \in X \wedge y \in Y \to Buxy) \to \\ \exists v \forall x, y\, (x \in X \wedge y \in Y \to Bxvy))$$

# Теорема Тарского о полноте

*Теорема.*

*Для любого предложения $A$ языка элементарной геометрии, если $(\mathbb{R}^2; =, B, \cong) \vDash A$, то $A$ логически следует из аксиом $G1 - G11$.*

*Теорема.*

*Существует алгоритм проверки формулы $A$ на выполнимость в $\mathbb{R}^2$.*

# *Исчисление предикатов*

Исчисление предикатов сигнатуры $\Sigma$ задаётся след. аксиомами и правилами вывода.

*Аксиомы:*

*A1.* Подстановочные примеры тавтологий,

*A2.* $\forall x A[a/x] \to A[a/t]$,

*A3.* $A[a/t] \to \exists x A[a/x]$.

Подстановочным примером тавтологии $A$ мы называем результат замены всех пропозициональных переменных $A$ на некоторые формулы сигнатуры $\Sigma$.

Пример: $B \vee \neg B$, где $B$ — любая формула.

В A2 и A3 $A$ — любая формула сигнатуры $\Sigma$ и $t$ — любой терм ($x$ не входит в $A$).

*Правила вывода:*

$$R1.\ \frac{A \quad A \to B}{B} \ (\textit{modus ponens})$$

$$R2.\ \frac{A \to B}{A \to \forall x B[a/x]}$$

$$R3.\ \frac{B \to A}{\exists x B[a/x] \to A}$$

Здесь $a$ не входит в $A$ (и $x$ не входит в $B$).

Правила R2 и R3 называются *правилами Бернайса*.

# Выводимость

*Опр.*

*Выводом в исчислении предикатов* называется конечная последовательность формул, каждая из которых либо является аксиомой, либо получается из предыдущих формул по одному из правил вывода $R1 - R3$.

*Пример.*

$$\begin{array}{ll} \forall x A[a/x] \to A & \text{(A2)} \\ \forall x A[a/x] \to \forall y A[a/y] & \text{(R2)} \end{array}$$

*Опр.*

Формула $A$ называется *выводимой* в исчислении предикатов или *теоремой* исчисления предикатов (обозначение $\vdash A$), если существует вывод, в котором последняя формула есть $A$.

*Пример.*

$\vdash \forall x A[a/x] \to \forall y A[a/y]$ для любой формулы $A$.

# *Выводы в теории*

*Опр.*

*Выводом в теории $T$* называется конечная последовательность формул, каждая из которых либо принадлежит множеству $T$, либо является логической аксиомой вида $A1 - A3$, либо получается из предыдущих формул по одному из правил вывода $R1 - R3$.

# *Доказуемость, опровержимость*

*Опр.*

Формула $A$ называется *выводимой (доказуемой) в теории $T$* или *теоремой $T$* (обозначение $T \vdash A$), если существует вывод в $T$, в котором последняя формула есть $A$.

*Опр.*

Формула $A$ *опровержима* в $T$, если $T \vdash \neg A$.

*Опр.*

Формула $A$ *независима* от $T$, если $T \nvdash A$ и $T \nvdash \neg A$.

## Свойства выводимости

- Если $T \subseteq U$ и $T \vdash A$, то $U \vdash A$ (*монотонность*).
- Если $T \vdash A$, то существует такое конечное множество $T_0 \subseteq T$, что $T_0 \vdash A$ (*компактность*).
- Если $T \vdash A$ и для каждой аксиомы $B \in T$ имеет место $U \vdash B$, то $U \vdash A$ (*транзитивность*).