Введение в математическую логику

Лев Дмитриевич Беклемишев
http://lpcs.math.msu.su/vml2020

Мех-мат МГУ, 2-й курс, осень 2020 г.

23.10.2020

Синтаксис логики высказываний

- Переменные: $\mathrm{Var} = \{P_0, P_1, \dots\}$.
- Связки: $\neg, \wedge, \vee, \to$; константы $\bot$ (ложь), $\top$ (истина).
- Формулы Fm строятся по правилам:

  1. Если $P \in \mathrm{Var}$ или $P \in \{\top, \bot\}$, то P — формула;
  2. Если A и B — формулы, то $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ — формулы.

- Fm есть наименьшее множество, удовлетворяющее условиям 1 и 2.

Лемма об однозначном прочтении

Лемма.

Любая формула F, отличная от переменной или константы, однозначно представляется в виде $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ или $(\neg A)$ для некоторых формул A, B.

Доказательство.

Соображения баланса скобок в формуле.

Опр.

- A и B называются *непосредственными подформулами* F;
- G — *подформула* F, если $G \mathrel{\mathring{=}} F$ или G — подформула одной из непосредственных подформул F.

Соглашения об опускании скобок

- Опускаем внешние скобки;
- Приоритет связок: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$;
  $\neg P \wedge Q \to R$ читается как $(((\neg P) \wedge Q) \to R)$;
- Кратные $\wedge$ и $\vee$ ассоциируем влево:
  $A \wedge B \wedge C$ читается как $((A \wedge B) \wedge C)$.

Семантика логики высказываний

Опр.

Истинностные значения: $\mathbb{B} \rightleftharpoons \{\text{Л}, \text{И}\} \rightleftharpoons \{0, 1\}$.
Булевы функции: $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$.

Таблицы истинности

Функции $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ принято задавать *таблицами истинности* вида

x_1	x_2	$\dots$	x_n	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
0	0	$\dots$	0	$f(0, 0, \dots, 0)$
0	0	$\dots$	1	$f(0, 0, \dots, 1)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
1	1	$\dots$	1	$f(1, 1, \dots, 1)$

В такой таблице 2^n строк.

Оценка и значение формулы

Опр.

Оценка переменных: функция $f : \mathrm{Var} \to \mathbb{B}$.

Любая оценка продолжается естественным образом до отображения $f : \mathsf{Fm} \to \mathbb{B}$.

Опр.

$f(A) =$ *значение* формулы A при оценке f.

Определяется индукцией по построению A:

Значение $f(A)$ определяется индукцией по построению A:

$$
\begin{aligned}
&f(\top) = 1;\ \ f(\bot) = 0;\\
&f(\neg A) = 1 - f(A);\\
&f(A \wedge B) = \min(f(A), f(B));\\
&f(A \vee B) = \max(f(A), f(B));\\
&f(A \to B) = \max(1 - f(A), f(B)).
\end{aligned}
$$

В частности, $f(A \to B) = 1 \iff f(A) \leq f(B)$.

То же самое другими словами:

$$
\begin{aligned}
f(\neg A) = \text{И} \quad &\Longleftrightarrow \quad f(A) = \text{Л};\\
f(A \wedge B) = \text{И} \quad &\Longleftrightarrow \quad f(A) = \text{И и } f(B) = \text{И};\\
f(A \vee B) = \text{И} \quad &\Longleftrightarrow \quad f(A) = \text{И или } f(B) = \text{И};\\
f(A \to B) = \text{И} \quad &\Longleftrightarrow \quad f(A) = \text{Л или } f(B) = \text{И}.
\end{aligned}
$$

Утверждение.

Пусть $\mathrm{Var} = \{P_1, \ldots, P_n\}$.
Тогда существует взаимно-однозначное соответствие между оценками $f : \mathrm{Var} \to \mathbb{B}$ и наборами $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}^n$.

$f \longmapsto (f(P_1), \ldots, f(P_n)) \in \mathbb{B}^n$
$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f_{\vec{x}}$, где оценка $f_{\vec{x}}$ определена таблицей

P_1	P_2	$\ldots$	P_n
x_1	x_2	$\ldots$	x_n

Таблицы истинности формул

Опр.

Таблица истинности формулы A от n переменных есть булева функция $\varphi_A : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ такая, что

$$\varphi_A(\vec{x}) = f_{\vec{x}}(A),$$

для всех $\vec{x} \in \mathbb{B}^n$.

Функциональная полнота

Теорема.

Для любой функции $\varphi : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ найдётся такая формула A от n переменных, что $\varphi = \varphi_A$. При этом можно считать, что A содержит лишь связки $\neg$ и $\vee$.

Доказательство.

Для $x \in \mathbb{B}$ положим

$$P^x = \begin{cases} P, & \text{если } x = \text{И}; \\ \neg P, & \text{если } x = \text{Л}. \end{cases}$$

Для $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}^n$ обозначим

$$A_{\vec{x}} \rightleftharpoons \bigwedge_{i=1}^{n} P_i^{x_i},$$

где $\bigwedge_{j=1}^{m} B_j \rightleftharpoons ((B_1 \wedge B_2) \wedge \cdots \wedge B_m)$.

Имеем: для любой оценки f

$$f(A_{\vec{x}}) = \text{И} \iff f = f_{\vec{x}}. \tag{1}$$

Пусть список $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m$ исчерпывает все $\vec{x} \in \mathbb{B}^n$ для которых $\varphi(\vec{x}) = \text{И}$, то есть

$$\varphi(\vec{x}) = \text{И} \iff \exists j \ \vec{x} = \vec{x}_j. \tag{2}$$

Положим

$$A \rightleftharpoons \bigvee_{j=1}^{m} A_{\vec{x}_j}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f_{\vec{x}}(A) = \text{И} \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists j \; f_{\vec{x}}(A_{\vec{x}_j}) = \text{И} \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists j \; \vec{x} = \vec{x}_j \quad \text{по (1)} \\ &\Longleftrightarrow \quad \varphi(\vec{x}) = \text{И} \quad \text{по (2)}. \end{aligned}$$

Значит, $\varphi_A(\vec{x}) = f_{\vec{x}}(A) = \varphi(\vec{x})$. $\boxtimes$

Выполнимые формулы

Опр.

Формула A *выполнима*, если $\exists f: \ f(A) = \text{И}$.

Опр.

Множество формул Γ *выполнимо*, если $\exists f \ \forall A \in \Gamma \ f(A) = \text{И}$.

Такая оценка f называется *выполняющей* для Γ.

Тавтологии

Опр.

Формула A — *тавтология*, если $\forall f \;\; f(A) = \text{И}$.

Опр.

Формула A — *тождественно ложна*, если $\forall f \;\; f(A) = \text{Л}$.

Предложение.

Следующие условия равносильны.

1. *Формула A тождественно ложна.*
2. *Формула A не выполнима.*
3. *Формула $\neg A$ — тавтология.*

Пример.

$\neg(P \to P)$ тождественно ложна (и не выполнима); $P \to P$ тавтология; $P \to Q$ выполнима, но не тавтология.

Проверка формулы на выполнимость

Очевидный алгоритм — перебор всех 2^n возможных оценок.

Открытый вопрос: существует ли алгортм, проверяющий формулу на выполнимость за полиномиальное число шагов (от длины формулы).

Проверка формулы на выполнимость — стандартный пример NP-полной задачи, поэтому этот вопрос эквивалентен знаменитой проблеме P=NP?.

Равносильные формулы

Опр.

Формулы A и B называются *равносильными* (*эквивалентными*), если $\forall f\ f(A) = f(B)$.

Обозначение: $A \equiv B$.

Пример.

$P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$; $P \to Q \not\equiv \neg P \to \neg Q$.

Предложение.

Пусть $\mathrm{Var} = \{P_1, \ldots, P_n\}$ *содержит все переменные, входящие в* A *и* B*.*

Тогда $A \equiv B$*, если и только если* $\varphi_A = \varphi_B$*.*

Утверждение.

1. Отношение $\equiv$ рефлексивно, симметрично и транзитивно.
2. $A \equiv B \iff A \leftrightarrow B$ — *тавтология*, где $A \leftrightarrow B \rightleftharpoons ((A \to B) \wedge (B \to A))$.
3. A — *тавтология* $\iff A \equiv \top$.

Основные равносильности

$A \wedge B$	$\equiv$	$B \wedge A$	$A \vee B$	$\equiv$	$B \vee A$
$A \wedge (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \vee C$
$A \wedge A$	$\equiv$	A	$A \vee A$	$\equiv$	A
$A \wedge (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
$A \vee (A \wedge B)$	$\equiv$	A	$A \wedge (A \vee B)$	$\equiv$	A
$\neg(A \wedge B)$	$\equiv$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B)$	$\equiv$	$\neg A \wedge \neg B$
$\neg\neg A$	$\equiv$	A	$A \to B$	$\equiv$	$\neg A \vee B$

Пример.

$P \to (Q \to R) \equiv (P \to Q) \to R$?

Ответ: Нет. Рассмотрим такую оценку f, *что*

$f(P) = f(Q) = f(R) = Л$.

Пример.

$P \to (Q \to R) \equiv (P \wedge Q) \to R$?

$$P \to (Q \to R) \equiv \neg P \vee (Q \to R) \equiv \neg P \vee (\neg Q \vee R) \equiv$$
$$(\neg P \vee \neg Q) \vee R \equiv \neg (P \wedge Q) \vee R \equiv (P \wedge Q) \to R.$$

Операция подстановки

Опр.

Если C и D — формулы, а $P \in \mathrm{Var}$, то через $C[P/D]$ обозначим результат подстановки формулы D вместо всех вхождений P в C.

Пример.

Пусть $C = (P_1 \to P_2) \to P_2$ и $D = P_3 \to P_2$. Тогда

$$C[P_2/D] = (P_1 \to (P_3 \to P_2)) \to (P_3 \to P_2).$$

Теорема о подстановке

Теорема.

1. *Если A — тавтология, B — произвольная формула, а $P \in \mathrm{Var}$, то $A[P/B]$ — тавтология.*
2. *Если $A \equiv B$, то $A[P/C] \equiv B[P/C]$.*

Пример.

Для любой формулы B формула $B \vee \neg B$ является тавтологией. Например, формула $(P_3 \leftrightarrow P_1) \vee \neg(P_3 \leftrightarrow P_1)$ — тавтология.

Лемма.

1. Если $A \equiv B$, то $\neg A \equiv \neg B$.
2. Если $A_1 \equiv B_1$ и $A_2 \equiv B_2$, то

$$\begin{aligned} A_1 \wedge A_2 &\equiv B_1 \wedge B_2 \\ A_1 \vee A_2 &\equiv B_1 \vee B_2 \\ A_1 \to A_2 &\equiv B_1 \to B_2. \end{aligned}$$

Теорема. (о замене подформулы на эквивалентную)
Если $A \equiv B$, *то* $C[P/A] \equiv C[P/B]$.

Теорема доказывается индукцией по построению формулы C.

Пример.
Пусть $A = Q \vee Q$, $B = Q$, $C = P \wedge R$. Так как $Q \vee Q \equiv Q$, то $(Q \vee Q) \wedge R \equiv Q \wedge R$.

Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы

Опр.

Литералами называются переменные и их отрицания.

Пример.

$P_3,\ \neg P_5$ — литералы;
$P_3 \vee P_1$ и $\neg\neg P_3$ — не литералы.

Опр.

Элементарной конъюнкцией называем формулу вида $\bigwedge_{i=1}^{n} L_i$, где L_i — литералы.

Пример.

$(P \wedge \neg Q) \wedge \neg P$ — элементарная конъюнкция;
$P \wedge (\neg Q \wedge \neg P)$ — не элементарная конъюнкция.

Опр.

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называем формулу вида $\bigvee_{j=1}^{m} C_j$, где C_j — элементарные конъюнкции.

Пример.

$(P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge R)$ и $(P \wedge Q \wedge R) \vee \neg P \vee \neg R$ — дизъюнктивные нормальные формы.

Аналогично определяются элементарные дизъюнкции и конъюнктивные нормальные формы (КНФ).

Опр.

Элементарной дизъюнкцией называем формулу вида $\bigvee_{i=1}^{n} L_i$, где L_i — литералы.

КНФ называем формулу вида $\bigwedge_{j=1}^{m} D_j$, где D_j — элементарные дизъюнкции.

Упражнение

Привести к КНФ формулу $(P \vee Q) \to R$. *Ответ:* $(\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$.

Теорема о ДНФ и КНФ

Теорема.

Каждая пропозициональная формула равносильна некоторой ДНФ и некоторой КНФ.

Доказательство.

(первый вариант) Достаточно заметить, что формула, построенная в доказательстве теоремы о функциональной полноте, является ДНФ.

Доказательство.

(второй вариант)

Применяем основные эквивалентности.

1. Выразим $\rightarrow$ через $\neg$ и $\vee$;
2. Проносим все отрицания максимально вглубь формулы;
3. Удаляем многократные отрицания.
4. Выносим все дизъюнкции максимально наружу, пользуясь дистрибутивностью;
5. Пользуясь ассоциативностью $\wedge$ и $\vee$ расставляем правильно скобки.

Замечание.
Если A — ДНФ, то $\neg A$ превращается в КНФ после переноса всех отрицаний вглубь и удаления двойных отрицаний.

Для того чтобы получить КНФ формулы A, достаточно применить этот алгоритм к ДНФ формулы $\neg A$.

Совершенные ДНФ и КНФ

Опр.

Формула A от переменных $P_1, \ldots, P_n$ называется *совершенной ДНФ*, если A — ДНФ и

- Каждая элем. конъюнкция имеет вид $A_{\vec{x}} \rightleftharpoons \bigwedge_{i=1}^{n} P_i^{x_i}$ для некоторого $\vec{x} \in \mathbb{B}^n$.
- $A = \bigvee_{j=1}^{m} A_{\vec{x}_j}$, где $\vec{x}_1, \ldots \vec{x}_m \in \mathbb{B}^n$ попарно различны и взяты в лексикографическом порядке.

Совершенные КНФ определяются двойственным образом.

Замечание.

Удобно считать $\perp$ совершенной ДНФ, а $\top$ – совершенной КНФ.

Для любой оценки f считаем $f(\top) = И$ и $f(\perp) = Л$. Имеем эквивалентности:

$$\boxed{\perp \equiv A \wedge \neg A; \quad \top \equiv A \vee \neg A.}$$

Как следствие можем вывести:

$\perp \wedge A \equiv \perp$, $\perp \vee A \equiv A$, $\top \vee A \equiv \top$, $\top \wedge A \equiv A$.

Теорема.

Всякая формула A от переменных $\{P_1, \ldots, P_n\}$ равносильна некоторой совершенной ДНФ.

Доказательство.

Воспользуемся равносильностями:

1. $A \wedge \neg A \equiv \perp, \quad \perp \wedge A \equiv \perp, \quad \perp \vee A \equiv A$ (удаляем противоречивые конъюнкции)
2. $A \wedge A \equiv A$ (удаляем повторы литералов)
3. $A \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$ (добавляем недостающие переменные)

Замечание.

Если данный набор переменных пуст, то формально необходимо также считать $\top$ совершенной ДНФ, а $\perp$ – совершенной КНФ.

Если A не содержит переменных, то $A \equiv \top$, если $f(A) = \text{И}$, и $A \equiv \perp$, если $f(A) = \text{Л}$.

Теорема.

Совершенные ДНФ эквивалентных формул (относительно одного набора переменных) графически совпадают.

Доказательство.

Для совершенной ДНФ каждая элем. конъюнкция определяет выполняющую оценку, а сама ДНФ — все такие оценки.

Следствие.

Совершенная ДНФ любой формулы A единственна.