Наследственно конечные множества и теорема Гёделя

1. Определение. Множество *наследственно конечных множеств* $\mathbb{HF}$ есть наименьшее по включению множество такое, что $\varnothing \in \mathbb{HF}$ и для любых $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{HF}$ $\{x_1, \ldots, x_n\} \in \mathbb{HF}$.

2. Докажите, что $\mathbb{HF} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} V_n$, где $V_0 = \varnothing$, $V_{n+1} = \mathcal{P}(V_n)$.

Для этого сначала покажите, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество V_n *транзитивно*, то есть $\forall x \in V_n \ \forall y \in x \ (y \in V_n)$. Чему равна мощность V_n?

3. Докажите, что в модели $(\mathbb{HF}, \in)$ определимы следующие отношения (в определяющих формулах x, x_i, y, z, R, f должны быть свободными переменными, означающими произвольные элементы $\mathbb{HF}$):

- "$x = \varnothing$", "$x = \{x_1, \ldots, x_n\}$" (для каждого фиксированного n);
- "$z = \langle x, y \rangle$", "$z = \bigcup x$", "$z = \mathcal{P}(x)$", "$z = x \times y$";
- "R есть бинарное отношение на $\mathbb{HF}$", "$x = \mathsf{dom}(R)$", "$y = \mathsf{rng}(R)$";
- "f есть функция", $f\colon x \to \mathbb{HF}$.

4. Убедитесь, что в $(\mathbb{HF}, \in)$ выполняются все аксиомы ZFC, за исключением аксиомы бесконечности.

5. Докажите, что $\mathbb{N}$ определимо в $(\mathbb{HF}, \in)$. ($\mathbb{N}$ состоит из множеств вида $\underline{n}$, где $\underline{0} = \varnothing$, $\underline{n+1} = \underline{n} \cup \{\underline{n}\}$.) Убедитесь, что отношение $<$ на $\mathbb{N}$ определимо в $\mathbb{HF}$.

6. Докажите, что все элементы $\mathbb{HF}$ являются определимыми, т.е., для каждого $x \in \mathbb{HF}$ можно выписать формулу $C_x(a)$, такую что $\forall y \in \mathbb{HF}$ $(\mathbb{HF} \models C_x[a/y] \iff x = y)$.

7. Пусть $\Sigma \subseteq \mathbb{HF}$ определимо. *Слово* $A \in \Sigma^*$ в алфавите Σ — это конечная функция $A\colon n \to \Sigma$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Выпишите определения отношений:
- "$|A| = n$",
- $A * B = C$ (конкатенация),
- "буква a входит в A"

(свободные переменные для a, A, B, C, n должны входить в эти определения).

8. Определение. *Алфавит языка теории множеств* $\Sigma_\in$*:*

- $\{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ — связанные переменные,
- $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ — свободные переменные,
- $\in$, $\vee$, $\neg$, $\exists$, (,).

Атомарные формулы — это слова вида $a_i \in a_j$.
Геделева нумерация:

- $\ulcorner v_i \urcorner = \langle \underline{0}, \underline{i} \rangle$, $\ulcorner a_i \urcorner = \langle \underline{1}, \underline{i} \rangle$,
- остальные символы занумеруем парами $\langle \underline{2}, \underline{i} \rangle$, $i = 0, \ldots, 5$.

Геделевым номером синтаксического объекта ϕ языка теории множеств называем соответствующее этому слову в алфавите $\Sigma_\in$ множество $\ulcorner\phi\urcorner \in \mathbb{HF}$.

9. Определите в $\mathbb{HF}$ множество $\Sigma_\in$ всех символов, множества BdVar и FVar связанных и свободных переменных, множество атомарных формул.

10. Определите в $\mathbb{HF}$ следующие отношения (от переменных A, B, C, a, v):

- $A = (B \vee C)$ "слово A есть формальная дизъюнкция слов B и C",
- $A = (\neg B)$ "слово A есть формальное отрицание слова B";
- $A = B[a/v]$ "слово A получено из слова B заменой переменной $a \in \mathsf{FVar}$ на переменную $v \in \mathsf{BdVar}$";
- $A = (\exists v B[a/v])$ "слово A получено из слова B с помощью квантора существования, где $a \in \mathsf{FVar}$, $v \in \mathsf{BdVar}$ и v не входит в B";
- $\mathsf{Fm}(A)$ "A есть геделев номер формулы". (*Указание:* как положено, сначала определите понятие построения формулы.)

11. 1. Определите отношение $x = V_n$ (от параметров x и $n \in \mathbb{N}$) в $\mathbb{HF}$.

2. Постройте формулу $x \prec y$, определяющую упорядочение $\mathbb{HF}$ изоморфное $(\mathbb{N}, <)$. (*Указание*: используйте пункт 1 и рекурсивно определите порядок на V_n.)

12. Пусть C_x — формула, определяющая элемент $x \in \mathbb{HF}$ в $\mathbb{HF}$. Определить предикат $z = \ulcorner C_x \urcorner$ в $\mathbb{HF}$ (предикат зависит от двух параметров, z и x).

(*Указание*: может быть использовано определимое упорядочение $\mathbb{HF}$.)

13. Для данной формулы $\varphi(a)$ и множества $x \in \mathbb{HF}$ обозначим через $\varphi(\underline{x})$ формулу $\exists v(C_x(v) \wedge \varphi[a/v])$. Определить предикат $\mathsf{Subst}(\varphi, x, y)$, выражающий $y = \ulcorner\varphi(\underline{x})\urcorner$.

14. Теорема Тарского. Положим

$\mathbb{T} = \{\ulcorner\varphi\urcorner \mid \varphi$ — предложение и $\mathbb{HF} \models \varphi\}$

$\mathbb{S} = \{\langle\ulcorner\varphi\urcorner, x\rangle \mid \varphi$ — формула с одной свободной переменной a, $x \in \mathbb{HF}$, $\mathbb{HF} \models \varphi[a/x]\}$

1. Покажем, что $\mathbb{S}$ неопределимо в $\mathbb{HF}$. Предположим, формула $S(a, b)$ определяет $\mathbb{S}$. Рассмотрим $\varphi(a) = \neg S(a, a)$. Положим $m = \ulcorner\varphi\urcorner$, $m \in \mathbb{HF}$. Истинно ли $\phi(m)$ в $\mathbb{HF}$?

2. Определите $\mathbb{S}$ через $\mathbb{T}$ (используя результат задачи 13) и сделайте вывод о том, что $\mathbb{T}$ тоже неопределимо.

15. Теорема Геделя. Теорию T назовем *определимой*, если соответствующее множество аксиом $\{\ulcorner\varphi\urcorner \mid \varphi \in T\}$ определимо в $\mathbb{HF}$.

1. Докажите, что если T определима, то множество ее теорем

$$\mathbb{P}_T = \{\ulcorner\varphi\urcorner \mid T \vdash \varphi\}$$

также определимо.

2. Сделайте вывод о том, что при некотором условии на T существует предложение φ, такое что $\varphi \in \mathbb{T}$, но $\varphi \notin \mathbb{P}_T$, то есть φ истинна и недоказуема. Что это за условие?

3. Объясните, почему теория ZFC (без аксиомы бесконечности) является определимой в $\mathbb{HF}$.