Факультатив № 4: Модальная логика

В **классической логике высказываний** формулы строятся из множества переменных $Var = \{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$ с помощью связок $\neg, \wedge, \vee, \to$. Чтобы приписать формулам «смысл» (семантику), задается *оценка* v переменных, приписывающая каждой переменной 0 или 1, то есть $v\colon \mathsf{Var} \to \{0, 1\}$. При оценке v некоторые формулы оказываются истинными, а некоторые — ложными. Формулы, истинные при всех оценках, называются *тавтологиями.*

В **модальной логике высказываний** формулы строятся из того же «арсенала», но добавляется новая *одноместная* связка — модальность $\Box$ (“необходимо”): если A — формула, то $\Box A$ — формула.

Будем использовать также производные связки:

$\Diamond A := \neg\Box\neg A$ (“возможно”) $\qquad \bot := p \wedge \neg p$ (ложь)
$A \leftrightarrow B := (A \to B) \wedge (B \to A)$ (эквиваленция) $\qquad \top := p \to p$ (истина)

Семантика. ***Модель Крипке*** $M = (W, R, V)$, где $W \neq \varnothing$ — непустое множество, $R \subseteq W \times W$ — бинарное отношение на W, оценка V указывает, в каких точках истинна каждая переменная: $V(p_i) \subseteq W$.

Определяем понятие «модальная формула A ***истинна*** в точке x модели M», обозначаемое $M, x \models A$. Определение дается индукцией по построению формулы A:

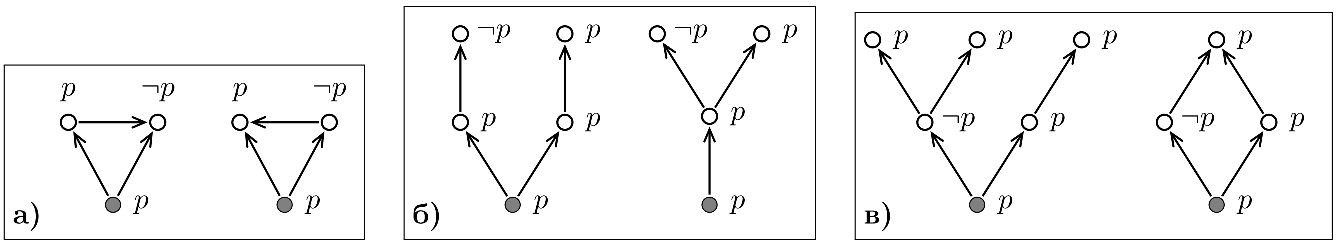
$$
\begin{array}{lcl}
M, x \models p_i & \iff & x \in V(p_i) \\
M, x \models \neg A & \iff & M, x \not\models A \\
M, x \models A \wedge B & \iff & M, x \models A \ \text{ и } \ M, x \models B \\
M, x \models A \vee B & \iff & M, x \models A \ \text{ или } \ M, x \models B \\
M, x \models A \to B & \iff & M, x \not\models A \ \text{ или } \ M, x \models B \\
M, x \models \Box A & \iff & \text{для каждой точки } y \in W, \text{ такой что } x\,R\,y, \text{ верно } M, y \models A.
\end{array}
$$

Отсюда получаем:

$$M, x \models \Diamond A \quad \iff \quad \text{существует точка } y \in W, \text{ такая что } x\,R\,y \ \text{ и } \ M, y \models A.$$

Задачи

1. Одинаковые ли формулы от переменной p истинны в нижних (черных) точках двух моделей:



Определение. *Бисимуляционная игра* $\mathsf{BG}_n(M, x, M', x')$ из n раундов на двух моделях с отмеченными точками (M, x) и (M', x'). (См. на доске.)

Определение. *Модальная глубина* $d(A)$ формулы A определяется по индукции:

$$
\begin{gathered}
d(p_i) = 0, \qquad d(\neg A) = d(A), \\
d(A \wedge B) \ = \ d(A \vee B) \ = \ d(A \to B) \ = \ \max\{d(A),\, d(B)\} \\
d(\Box A) = 1 + d(A).
\end{gathered}
$$

Теорема. ***2-й*** *игрок имеет выигрышную стратегию в игре* $\mathsf{BG}_n(M, x, M', x')$ $\iff$ *в* (M, x) *и* (M', x') *истинны одни и те же модальные формулы* A *глубины* $d(A) \leqslant n$.

2. В примерах а)–в) задачи 1 покажите, как должен играть 1-й или 2-й игрок, чтобы выиграть. Кто имеет выигрышную стратегию в игре из 1 раунда? в игре из 2 раундов?

Общезначимость модальной формулы на шкале

Шкала — это структура $F = (W, R)$, где $R \subseteq W \times W$. То есть модель, но без оценки.

Фактически, шкала — это ориентированный граф (не обязательно конечный).

Модальная формула A называется ***общезначимой*** на шкале $F = (W, R)$, если A истинна во всех точках $x \in W$ всех моделей $M = (W, R, V)$, построенных "над этой шкалой".

3. Опишите, как по модальной формуле A узнать, что она общезначима на:
   а) одноточечной иррефлексивной шкале $F = (W, R)$, $W = \{x\}$, $R = \varnothing$,
   б) одноточечной рефлексивной шкале $F = (W, R)$, $W = \{x\}$, $R = \{\langle x, x\rangle\}$.

4. На каких шкалах общезначима формула: **а)** $p \to \Diamond p$; **б)** $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$?

5. Рассмотрим шкалу (*кластер*), состоящую из n точек, в которой из каждой точки в каждую ведет стрелка: $F_n = (W_n, R_n)$, где $W_n = \{1, 2, \dots n\}$ и $R_n = W_n \times W_n$.

   а) Напишите формулу, общезначимую на шкале F_1, но не F_2.
   б) Напишите формулу, общезначимую на шкале F_2, но не F_3.
   в) Напишите формулу, общезначимую на шкале F_n, но не F_{n+1}.
   г) Объясните, почему всякая формула, общезначимая на шкале F_{n+1}, общезначима на шкале F_n.

   Таким образом, множество формул, общезначимых на шкале F_n, строго уменьшается с ростом n.

Эквивалентность модальных формул

Модальные формулы A и B называются ***эквивалентными***, если формула $(A \leftrightarrow B)$ общезначима на всех шкалах. Вспомним, что в логике высказываний попарно неэквивалентных формул от переменных $p_1, \dots, p_n$ лишь конечное количество, а именно 2^{2^n}. В модальной логике ситуация гораздо сложнее.

6. Приведите бесконечное число попарно неэквивалентных модальных формул от переменной p.

7. Оцените сверху число попарно неэквивалентных модальных формул от переменной p глубины 1.

Модальная логика на первый взгляд непривычна, так как в обычных математических рассуждениях модальности не используются. Тем не менее, это очень удобный инструмент в таких областях, как:

- изучение ***логик времени*** — модальности «всегда будет», «когда-то будет», «всегда было» и др.;
- изучение ***логик знания*** — здесь $\Box_{\mathsf{Jonh}} A$ понимается «агент John знает, что A»;
- изучение ***доказуемости*** в формальных математических теориях — здесь $\Box A$ понимается как «утверждение A доказуемо в формальной теории T»;
- изучение ***интуиционистской логики*** — логики без закона исключенного третьего $A \vee \neg A$;
- в ***computer science*** (теоретической информатике) при изучении поведения программ, для доказательства правильности их работы (так называемая *верификация* программ). Здесь $\Box_q A$ может пониматься как «после выполнения программы q непременно будет выполнено условие A».
- ***представление знаний*** — для записи знаний в некоторой предметной области (например, биоинформатика, генетика) и извлечение новых знаний из имеющихся; соответствующий математический язык (дескрипционная логика, близкая к модальной) лежит в основе «языка сетевых онтологий» OWL.