Факультатив, задачи.

Пусть язык содержит все булевы связки, включая константы $\bot$, $\top$. Ниже предполагается, что множества формул Γ и Δ содержат все частные случаи тавтологий (их подстановочные примеры). Будет использовано единственное правило вывода – *modus ponens* (MP): $A \to B, A \vdash B$.

По определению, $\Delta \vdash A$, если существует вывод формулы A из гипотез Δ, т.е. такая конечная последовательность формул $A_0, \ldots, A_n = A$, каждый член которой либо принадлежит Δ, либо получен из предыдущих (с меньшими индексами) по правилу (MP). Имеет место Теорема о дедукции: $\Delta, A \vdash B \Rightarrow \Delta \vdash A \to B$.

Если $\Delta \vdash \bot$, то множество Δ называется *противоречивым*, иначе – *непротиворечивым.* Т.к. $B \wedge \neg B \leftrightarrow \bot$ – тавтология, то условие противоречивости эквивалентно двум: $\Delta \vdash B$ и $\Delta \vdash \neg B$ для любой фиксированной формулы B.

1. $\Delta \vdash \bot \Rightarrow \Delta \vdash A$ для любой формулы A, т.к. $\bot \to A$ – тавтология.
2. $\Delta, A \vdash \bot \Leftrightarrow \Delta \vdash \neg A$.
3. Если $\Delta \nvdash \bot$, то существует максимальное множество $\Gamma \supseteq \Delta$ со свойством $\Gamma \nvdash \bot$.

Пусть Γ – максимальное непротиворечивое множество, т.е. $\Gamma \nvdash \bot$ и $\Gamma, B \vdash \bot$ для любой формулы $B \notin \Gamma$.

4. $\Gamma \vdash A \Rightarrow A \in \Gamma$. Верно ли "$\Leftarrow$" ?
5. $\neg A \in \Gamma \Leftrightarrow A \notin \Gamma$.
6. $A \wedge B \in \Gamma \Leftrightarrow (A \in \Gamma$ и $B \in \Gamma)$.
7. $A \vee B \in \Gamma \Leftrightarrow (A \in \Gamma$ или $B \in \Gamma)$.
8. $A \to B \in \Gamma \Leftrightarrow (A \notin \Gamma$ или $B \in \Gamma)$.

Формула называется *квазиатомарной*, если она не является булевой комбинацией других формул. (Для логики свидетельств квазиатомарными являются все атомарные формулы, а также все формулы вида $t{:}F$.)

9. Пусть отображение $*\colon Fm \to \{0,1\}$ задано на всех квазиатомарных формулах так, что $F^* = 1 \Leftrightarrow F \in \Gamma$, и продолжено на остальные формулы с помощью таблиц истинности для булевых функций. Тогда условие $F^* = 1 \Leftrightarrow F \in \Gamma$ выполняется для всех формул.

10. Доказать полноту аксиоматики J^- в классе всех моделей логики свидетельств: $\mathsf{J}^- \nvdash F \Rightarrow F^* = 0$ для некоторой модели $*$.
(J^- = все тавтологии + $(s{:}(F \to G) \to (t{:}F \to [s \cdot t]{:}G)$.)

    Указание. Взять в качестве Γ максимальное непротиворечивое расширение множества $\mathsf{J}^- \cup \{\neg F\}$ и применить предыдущую задачу.