Полезно посмотреть ссылку http://lpcs.math.msu.su/~lyubetsky/.

Ниже в основном говорится о теории множеств, в конце одна из проблем относится к теории моделей (в её алгебраическом аспекте).

1. Математика – система умственных представлений, конструкций и процессов, которые мы называем здесь понятиями. Одни понятия могут быть разъяснены через другие, но ясно, что какие-то из них первичны и свойственны нашему сознанию до любых формулировок и определений (по крайней мере, математических). Эти первичные понятия внутренне присущи, имманентны психике. Два из них – понятие биекции и умственный процесс прибавления «единицы» (наращивания уже созданной цепи следующим звеном).

Биекция понятна с самого раннего возраста и неявно присутствует в многочисленных бытовых ситуациях. Например, в правильном гардеробе имеется *биекция* между всеми сданными пальто и всеми выданными номерками, чтобы работник выдавал пальто по номерку без конфликта. Приведём менее бытовые примеры.

a) Найти целые числа (это суть $0, \pm 1, \dots, \pm n, \dots$), удовлетворяющие уравнению $x \cdot y = 2(x+y)$. Совсем просто перейти к нахождению натуральных чисел $n = 1, 2, 3, \dots$, удовлетворяющих уравнению. Это значит: найти все прямоугольники, у которых площадь равна периметру. В таком прямоугольнике «единичный» отрезок, измеряющий периметр, уложится в нём $2(x+y)$ раз, а «единичный» квадрат с «единичной» стороной, измеряющий площадь, уложится в теле прямоугольника $x \cdot y$ раз, рис. 1. Рассмотрим полосу из квадратов, прилегающую к сторонам. Отрезки и квадраты биективны, кроме как на углах, как показано штриховкой на рис. 1. Для их биекции нужно ещё 4 квадрата, и таковые могут занять место только лишь внутри полосы. Это можно сделать ровно двумя способами, откуда получаем ровно два решения (4,4) и (3,6). Здесь нетривиальная часть – увидеть биекцию на рис. 1. В задачке не нужно сосчитать отрезки или квадраты, т.е. по существу числа не нужны.

b) Пусть отрезок [0,1] равен объединению его подмножеств X_α, т.е. $[0,1] = \bigcup_{\alpha \in Y} X_\alpha$. Может ли быть, что все X_α небиективны с отрезком? Легко заметить, что X_α можно считать попарно непересекающимися; это более наглядно, но не влияет на решение. Тогда пишут $[0,1] = \coprod_\alpha X_\alpha$, где знак $\coprod$ означает дизъюнктное объединение. Для одного слагаемого равенство очевидно невозможно. Если слагаемых столько, что α пробегает все точки отрезка (т.е. множество индексов Y биективно с отрезком), то равенство верно при естественном выборе слагаемых. Если Y конечно или счётно, то равенство невозможно. Докажем это для двух слагаемых, аналогично для большего числа слагаемых. Пусть $[0,1] = X_1 \coprod X_2$. Совсем просто показать, что $[0,1]$ биективен с квадратом $[0,1]^2$ (с единичной стороной). Эта биекция переносит X_1 и X_2 в квадрат (полученные множества обозначим теми же буквами), т.е. $[0,1]^2 = X_1 \coprod X_2$. Наконец, приведём нетривиальное рассуждение (до этого было тривиально): на каждом перпендикуляре, рис. 2, имеется хотя бы одна точка из X_1 или это не так (и тогда имеется перпендикуляр, на котором находятся точки только из X_2). Далее опять тривиально. В 1-ом случае в X_1 содержится подмножество биективное с $[0,1]$ (с каждого перпендикуляра берём по точке) и само X_1

биективно с частью $[0,1]$, тогда X_1 и $[0,1]$ биективны[1]. Аналогично для X_2. Решения обеих задач наглядны, геометричны и это родовое свойство теории множеств. В равной мере для теории множеств типичны эффективные вычисления (почти как алгоритмические, компьютерные вычисления с числами или вычисления в теории меры).

2. Прибавление/добавление 1 – внутренне присущее психике, имманентное понятие. На чём кончается такой процесс? Представим себе, что после натуральных чисел 1, 2, …, *n*, … располагается ещё число ω_0, и с него, как с 1, считаем дальше ω_0+1, ω_0+2, …, ω_0+n, …, за этими числами располагается ещё число $\omega_0\cdot 2$, и, как с 1, считаем дальше $\omega_0\cdot 2+1$, $\omega_0\cdot 2+2$, … и так далее, никогда не останаливаясь. (Запись $\omega_0\cdot 2$ читается: сумма ω_0 два раза.) Все так получающиеся числа называют *ординалами*, а их совокупность – *ординальным рядом On* (по аналогии с натуральным рядом). Кто-то заметит, что в *On*, кроме добавления 1, используется ещё переход к пределу по *строго возрастающей цепочке меньших ординалов*. Например, $\omega_0 = \lim_{n<\omega_0} n$. В *On* много строго возрастающих цепочек, но нет ни одной строго убывающей. Последнее не совсем просто доказывается, но имеет важное следствие: совокупность *On* вполне упорядочена. Действительно, пусть $\varnothing \neq X \subseteq On$ (здесь говорится: подмножество X непустое). Тогда $\exists x \in X \forall y \in X (x \le y)$, докажем чуть меньше $\exists x \in X \forall y \in X \neg (y < x)$ (покажите на примерах разницу этих утверждений). Возьмём любое $x_1 \in X$, оно искомое или нет, во 2-м случае существует $x_2 < x_1$ и т.д. Образуется убывающая цепочка в X, она же в *On*, что невозможно. Первое из этих утверждений доказано в [1, стр. 408-409]. Интересно, что понятие ординала α (как множества) можно определить короткой формулой:

$$\forall y \in x (y \subseteq \alpha),\ \ \forall y \in \alpha \forall z \in y (z \subseteq \alpha),$$

где запятая означает «и» (часто пишут знак $\wedge$). Короткой формулой трудно записать нетривиальное понятие, а длинную формулу трудно фактически выписать, поэтому длинные формулы, по сути, – абстрактные объекты, похожие на натуральные числа. Что мы знаем о натуральном числе 10^{1000}, превосходящем характеристики Вселенной, – только некоторые умственные идеи (например, что оно делится на 10).

Любая строго возрастающая последовательность рациональных чисел, сходящаяся к 1, биективна с сохранением порядка ординалу ω_0. Биекцию, которая сохраняет какое-то отношение/ия, называют *изоморфизмом*. Между 1-м и 2-м членами этой последовательности вставим аналогичную последовательность, сходящуюся ко 2-му члену. Полученная последовательность изоморфна $\omega_0\cdot 2$. Легко заметить, что любой счётный (как множество) ординал изоморфен некоторой последовательности строго возрастающих рациональных чисел в отрезке $[0,1]$, и наоборот.

Это приводит к замечательному способу индивидуального описания важных множеств. Пусть дано любое счётное множество *R* горизонтальных рациональных отрезков (т.е. с рациональными концами) в квадрате $[0,1]^2$. Такое множество называется *решетом* и легко задаётся вещественным числом (как?). По решету *R* определяются два множества C(*R*) и A(*R*):

---

[1] Биекция между X и частью Z в Y, $Z \subseteq Y$, называется *инъекцией* X в Y. Докажите: если существуют инъекции X в Y и Y в X, то X и Y биективны. Доказательство несколько длинное, но чисто техническое.

$x \in C(R) \Leftrightarrow$ «перпендикуляр в точке x, пересечённый с *R*, вполне упорядочен, т.е. является ординалом» и $x \in A(R) \Leftrightarrow$ «перпендикуляр в точке x, пересечённый с *R*, не вполне упорядочен, т.е. не является ординалом». Так определяемые множества обладают замечательными свойствами.

Итак, множество X можно задать формулой вида $X = \{x \mid \varphi(x)\}$, где $\varphi(x)$ – свойство того, что обозначено x, т.е. $\varphi(x)$ – формула, включающая x, но так задаются немногие интересные множества; или X можно задать решетом *R*.

3. Процессом очень похожим на описание ординального ряда *On* зададим последовательность множеств: сначала это – пустое множество (аналог нуля); если процесс дошёл до ординала α, то образуем множество L_α всех уже ранее образованных множеств на шагах $\beta < \alpha$ и к нему добавим все множества вида $\{x \in L_\alpha \mid \varphi(x, y_1, \ldots, y_n)\}$, где $y_1, \ldots, y_n \in L_\alpha$ (т.е. $y_1, \ldots, y_n$ – ранее образованы) и φ – любая формула, в которой все кванторы ограничены[2] к L_α, т.е. ограничены опять-таки к ранее образованным множествам (которые родились до момента/шага α). Очень естественный процесс, похожий на математическую индукцию, только последняя идёт по части ординалов, до ω_0. В результате получим совокупность $L = \bigcup_\alpha L_\alpha$ – мир всех формульных множеств (или, говорят, *гёделевский универсум*). Идея Гильберта состояла в том, что никаких множеств, кроме формульно-задаваемых (формульно-определяемых), не бывает. Гёдель осуществил эту идею, только добавив ординалы, которые не-формульные множества. Гильбертом руководила идея, что множества не нужны, а следует работать только с формулами: на современном языке это означает – работать в универсуме L.

Вещественные числа, которые принадлежат L, называются *конструктивными* (по Гёделю), их множество *обозначают* L^+. Нетрудно доказать, что $L^+ \subseteq L_{\omega_1}$, где ω_1 – *первый несчётный* ординал (также как ω_0 – *первый счётный* ординал). Отсюда очевидно, что L^+ биективно с ω_1. Ровно в этом состоит знаменитая гипотеза континуума Г. Кантора, первая в знаменитом списке из 23 фундаментальных проблем Гильберта, (если L^+ – это все вещественные числа).

4. Принципиально другая операция состоит в образовании множества $P(X)$ всех подмножеств множества X. А именно, $P(X) = \{Y \mid Y \subseteq X)\}$. Эта операция порождает нечто загадочное: множество $P(X)$ образовано, но ничего неизвестно о его элементах (кроме тривиального свойства $Y \subseteq X$).

5. Идея Коэна – совокупность L можно раздуть вширь (не трогая ординальный ряд – позвоночник в мире множеств), добавив к L много подмножеств даже очень простого множества – натурального ряда ω_0. Это будут подмножества, о которых ничего не известно, *случайные* подмножества (они определены в пункте 7). Их можно добавить сколько угодно, так что вещественные числа будут биективны с каким угодно ординалом (с тривиальными оговорками).

5. Таким образом, во второй половине 20-го века на новом уровне возникла ситуация, которая обсуждалась ещё Аристотелем: имеется разница между $\exists x$ и $\forall x$. Действительно, естественно

---

[2] Это значит, что кванторы имеют вид $\exists x \in L_\alpha$ или $\forall x \in L_\alpha$.

понимать $\exists x$ как $\exists x \in L$, так как L состоит из формульно-определимых множеств, и понимать $\forall x$ как $\forall x \in V$, где V – совокупность всех множеств, включая случайные, т.е. для всех x, какие ни есть. Такое V называется *универсумом* (множеств). Но этому благому делу мешает связь кванторов $\exists x$ и $\forall x$, докажите: $[\exists x \varphi(x)] \Leftrightarrow [\neg \forall x \neg \varphi(x)]$. Это вытекает из связи: $(\neg\neg\varphi) \Leftrightarrow \varphi$ (*). Проблема эквивалентности (*) уходит в вопрос, каков смысл связок. Все связки, кроме $\neg\varphi$, понятны на общекультурном (русском) языке и соответственно означают: « $\exists x$ = предъявить x », « $\forall x$ = для всякого x », « $\vee$ = или», « $\wedge$ = и». Но что означает «НЕ». Обычное, из школьной математики понимание $\neg\varphi$ такое: «допустим φ и придём к противоречию». Ясно, что тут возникают трудности.

6. Слово «неразрешимая» имеет много смыслов.

А) Каждая теория в анализе, алгебре, геометрии и т.д. имеет некоторый набор знаков и формул, которые позволяют записывать все её суждения, истинные или ложные. Такой набор знаков и формул называют (математическим) *языком*. Сформулируйте языки для привычных Вам теорий, начиная со школьной планиметрии. Можно ли построить алгоритм (компьютерную программу), который/ая по входу φ – суждению в таком языке, выдаёт 1 или 0 в зависимости от истинности φ в этой теории. Это – вопрос об *алгоритмической разрешимости*/*неразрешимости*. В нём «истинность» можно уточнять по-разному. Например, можно сформулировать аксиомы и правила вывода (= правила, которые порождают/образуют новые суждения из уже ранее полученных). Вместе язык, аксиомы и правила вывода называют (в математическом смысле) *теорией*. Все суждения, порождаемые в данной теории *T*, называют *выводимыми* в *T*. Выводимость похожа на математическую индукцию или на определения *On* и *L*. Можно спросить об алгоритме, который выдаёт 1 или 0 в зависимости, от выводимости формулы φ в теории *T* (φ и *T* подаются на вход алгоритма). Если ответ 1, то всегда имеется тривиальный алгоритм, который находит сам вывод для φ: нужно просто перебирать все выводы, пока не дойдём до вывода, который оканчивается на φ. Конечно, вопрос о существовании/не-существовании алгоритма можно отнести и ко многим важным отдельным вопросам. Например, 10-ая проблема Гильберта из упомянутого списка проблем спрашивает, существует ли алгоритм, который определяет, имеет ли решение произвольное алгебраическое диофантово уравнение. Большое значение имеет всё более быстрый алгоритм умножения натуральных чисел.

В) Можно не спрашивать об алгоритме, как в подпункте А, а просто искать суждение φ, для которого φ и $\neg\varphi$ не выводимы в данной теории *T* (само собой, что одно из них истинно). Такие суждения называют *неразрешимыми* относительно *T*, они известны в обычной арифметике и во всех обычных теориях. Например, для планиметрии это – суждение, утверждающее существование параллельной прямой. Для арифметики или планиметрии нет ничего удивительного в неразрешимых суждениях, так как очевидно имеется мир вне этих теорий, который не описывается ими. Например, для арифметики и планиметрии таким миром являются вещественные числа.

Обнаружена теория, относительно которой известны неразрешимые суждения и на ней кончается весь математический мир. Это – теория множеств ZFC. Удивление перед этой ситуацией усиливается тем, что среди неразрешимых известны очень простые и естественные суждения о вещественных числах или о простых множествах вещественных чисел, которые возникли, например, в математическом анализе или в других прикладных областях. Такие неразрешимые суждения иногда называют *абсолютно неразрешимыми*. Эти суждения не аналогичны суждению «теория ZFC непротиворечива», которое также неразрешимо. Кто-то может подумать, что абсолютно неразрешимые суждения возникают в связи с изъянами в самой теории ZFC, но это не так. Они остаются неразрешимыми в любой её естественной переформулировке. Конечно, вопрос, есть ли мир вне ZFC, не является простым. При его обсуждении можно исходить из того, что доказуемым должно быть всё, что естественнонаучно верно, а иные суждения излишни и не должны быть выводимыми.

7. Пусть речь идёт о пространствах вещественных чисел **R** или **R**$^{\mathbf{n}}$**.** Кольцом множеств в них называется наименьшее множество, которое включает открытые и замкнутые множества и замкнуто относительно операций счётных объединений и счётных пересечений. Множество, входящие в такое кольцо, называют *борелевским*. Особенность борелевских множеств в том, что для них отсутствуют естественные абсолютно неразрешимые суждения. Каждое борелевское множество однозначно кодируется вещественным числом (как?). Борелевское множество *B* с кодом *r* записывают B_r.

Легко видеть, что подмножества в ω_0 и вещественные числа **R** изоморфны. Обещанное определение: число x из **R** называется *случайным* (по Соловею), если неверно, что $x \in B_r$, где $r \in L^+$ и B_r меры нуль.

8. Если счётные объединения и счётные пересечения заменить несчётными, то возникает принципиально другая ситуация. Примером в этом смысле несчётной операции является обычное проектирование из **R**$^{\mathbf{n}}$ и **R**$^{\mathbf{m}}$, где m<n, и, в частности, проектирование из **R**$^{\mathbf{2}}$ в **R**. *А-множеством* называется проекция борелевского множества, а *CA-множеством* называется дополнение до всего **R**$^{\mathbf{m}}$ любого А-множества. *A_2-множеством* называется проекция CA-множества, а *CA_2-множеством* – его дополнение. Все множества, образованные последовательным применением операций проектирования и дополнения, называются *проективными*. A_2- и CA_2-множества и следующие за ними проективные множества – как раз те, для которых естественные общематематические вопросы абсолютно неразрешимы.

<u>Задачи</u>. 1) Пусть $[0,1] = \bigcup\limits_{\alpha \in Y} X_\alpha$. Может ли быть, что все X_α небиективны с отрезком? Решите для случая конечного (≥3) или счётного числа слагаемых.

2) Укажите биекцию между $[0,1]$ и $[0,1]^2$. Между **R** и **R**$^{\mathbf{2}}$.

3) Докажите: если существуют инъекции X в Y и Y в X, то X и Y биективны.

4) Покажите на примерах разницу между утверждениями $\exists x \in X \forall y \in X (x \le y)$ и $\exists x \in X \forall y \in X \neg(y < x)$.

5) Докажите: любой счётный (как множество) ординал изоморфен некоторой последовательности строго возрастающих рациональных чисел в отрезке $[0,1]$, и наоборот.

6) Определите кодировку решета вещественным числом.

7) Укажите решёта *R* , для которых *A*(*R*) равно отрезку [0,1] или полуинтервалу [0,1).

8) Для какого наименьшего α выполняется $\omega_0 \in L_\alpha$?

9) Докажите: $L^{+} \subseteq L_{\omega_1}$, где ω_1 – первый несчётный ординал.

10) Является ли множество иррациональных чисел борелевским? Приведите другие примеры борелевских множеств, кроме открытых, замкнутых и рациональных чисел. Приведите по пять примеров открытых из замкнутых в **R** множеств. Аналогично для $\mathbf{R}^2$.

11) Определите кодировку борелевских множеств вещественными числами.

12) Укажите биекцию между $P(\omega_0)$ и вещественными числами **R.**

13) Представьте проекцию множества *B* как объединение множеств, не используя саму проекцию.

Проблемы: 1) приведите пример А-множества, которое не борелевское; СА-множества, которое не А-множество и не борелевское. И аналогично: укажите проективное множество следующего уровня, не принадлежащее всем предыдущим уровням, тем самым, будет показано, что все уровни непустые. Интуитивно сложность множества с возрастанием уровня увеличивается. Как разумно определить сложность проективного множества?

2) <будет о теории моделей>

[1] В.А. Любецкий Элементарная математика с точки зрения высшей. Основные понятия. 2019 ….