

Области исследований  
в математической логике и теории алгоритмов  
*Определимость*

**Алексей Львович Семенов**

Зав. Кафедрой математической логики и теории алгоритмов

Директор института кибернетики и образовательной информатики им. А. И. Берга  
ФИЦ ИУ РАН

Академик Российской академии наук и Российской академии образования

# Чем занимается математическая логика и теория алгоритмов?

## Исследования сотрудников и **СТУДЕНТОВ** нашей кафедры

- Важная часть подготовки математика: исследование
- Встречи раз в две недели, перед просеминаром дают возможность составить представление об исследованиях и начать собственное исследование.
- Процесс выбора кафедры для продолжения образования и исследования
- Сегодня: **ОПРЕДЕЛИМОСТЬ**
- Будут:
  - Объяснения, обозначения, определения
  - Упражнения – решать на месте (можно сообщать свою фамилию и имя)
  - Задачи – решать на месте или дома (сложность – по 100-балльной шкале)
  - Проблемы (не решенные задачи) – для исследования (курсовые и дипломные работы, статьи...)

# Определимость.

## *Первый пример*

- Целые числа  $\mathbb{Z}$ .
- 2-местное отношение «*a делит b*», обозначение  $a|b$ 
  - $-4|12$
- Упражнение. Определить через «... *делит*...», 1-местное отношение «*a равно нулю*»
- Задача [10]. Определить 1-местное отношение «*a равно 1*»
  - Доказательство невозможности
  - Автоморфизм – смена знака, сохраняет отношение «... *делит*...», и все, что через него определимо.
- Общее понятие автоморфизма.

# Определимость

## Основной (сегодня) пример

- Рациональные числа  $\mathbb{Q}$
- 2-местное отношение « $a$  меньше  $b$ », обозначение  $a < b$
- **Все отношения, о которых пойдет речь в этом разделе:**
  - На  $\mathbb{Q}$
  - определяются через  $<$
- Что можно определить через  $<$ ?
- Задача [10]. Определить 1-местное отношение « $a$  равно 0»
- Автоморфизм
- Задача [15] Какие 2-местные отношения можно определить через  $<$ ?
  - Например:  $>$  (больше),  $=$  (равно)
  - Через «больше» можно определить «меньше»
  - Что еще?
- Упр. (Задача [10]) Придумать какое-нибудь 3-местное отношение, которое можно определить через  $<$ .

Задача [15] Придумать какое-нибудь 3-местное отношение, которое можно определить через  $<$ .

- 3-местное отношение  $M$ : « $a$  между  $b$  и  $c$ »  $\leftrightarrow b < a < c \vee c < a < b$
- Задача [10] Можно ли через отношение  $M$  определить  $<$
- Обозначение для определмости отношений
  - $M \cong <$
- Упр. Придумать общее определение определмости одного отношения через другое
- Упр. Определить «взаимную определмость»  $\cong$
- Упр. Придумать какие-нибудь еще 3-местные отношения и установить между ними соотношения определмости.
- Задача [20] Сколько может быть 3-местных отношений, попарно не взаимно определмых? Может ли их быть бесконечно много? больше 100?

Задача [15] Придумать какое-нибудь 4-местное отношение, которое можно определить через  $<$ .

- Подсказка. Рассматривать две пары аргументов  $a, b$  и  $c, d$  как два отрезка и рассматривать их взаимное расположение
- Попытаться выписать как можно больше не взаимно определимых четырехместных отношений
- Задача [20] Сколько может быть 4-местных отношений, попарно не взаимно определимых? Может ли их быть бесконечно много? больше 100?

# Определимость

## *Еще примеры, задачи, нерешенные проблемы*

- Задача [50]. Указать все попарно не взаимно определимые отношения для  $\mathbb{Q}, <$
- Следующая Задача [60].  $\mathbb{Q}^+, <$  где  $\mathbb{Q}^+ = [0; \infty)$
- Задача [60].  $\mathbb{Q}, +$
- Задача [70].  $\mathbb{Z}, <$

- Можно обсудить после конца просеминара или написать

**alsemno@ya.ru**