

Теория определимости

Представьте себе, что Вы живете на прямой (рациональной, или действительной, не так важно) и в Вашем языке есть только одно понятие: «слева» (в числовых терминах – двухместное отношение «меньше» - <). Что Вы можете объяснить кому-то другому? – Не так уж много, например, что значит «справа» («больше» - >). Другими словами, Вы знаете, как **определить** «больше» через «меньше».

1. Можете ли Вы объяснить, что значит «между», то есть определить трехместное отношение «между», через отношение «меньше»?

Можно записать решение словами:

« x между y и z » – это значит, что y меньше x , а x меньше z , или z меньше x , а x меньше y .

Можно записать решение формулой, используя логические знаки – \wedge для «и», \vee для «или»:

$$M(x,y,z) \Leftrightarrow (y < x \wedge x < z) \vee (z < x \wedge x < y)$$

Дальше Вам могут понадобиться и другие логические знаки, например, кванторы \forall, \exists .

Чего Вы НЕ можете определить?

2. Можете ли Вы определить, что значит «находиться в нуле» (определить через < одноместное отношение $=0$). Подумайте, почему?
3. Можете ли Вы определить, что значит $<$, через «между» (определить двухместное отношение $<$) через трехместное отношение «между»?

Два отношения назовем **эквивалентными**, если каждое из них можно определить через другое.

Будем, пока рассматривать только отношения, определимые через $<$ на рациональных числах.

Вот задачи посложнее:

4. Найти все двухместные не эквивалентные между собой отношения. То же для трехместных и четырехместных отношений.
5. Найти все не эквивалентные между собой отношения (определимые через порядок на рациональных числах).

Задачи, с которыми Вы познакомились на этой странице, относятся к теории определимости (части математической логики). Как Вы догадываетесь, эта теория занимается не только отношениями, определимыми через порядок на прямой. В ней довольно быстро начинаются открытые проблемы (еще не решенные задачи). Пример такой задачи:

6. Найти все (взаимно не эквивалентные) отношения, определимые через $<$ на целых числах.

Вот задача попроще (но ее тоже интересно было бы решить):

7. Найти все (взаимно не эквивалентные) отношения, определимые через $<$ на неотрицательных рациональных числах.

Профессор **Алексей Львович Семенов**, заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов, академик Российской академии наук.

Свои решения задач, идеи и вопросы на эту тему (и другие темы из математической логики и теории алгоритмов) можно присылать по адресу alsemno@ya.ru. Можно узнать и о других задачах, получить уточнения определений, и т. д.