

# Введение в математическую логику и теорию алгоритмов

## Семинар № 4: Языки первого порядка

(см. книгу: Верещагин, Шень «Языки и исчисления», §3.4, 4.1)

### Выразимость в арифметике (продолжение)

Чтобы выразить  $x = 2^z$  в структуре  $(\mathbb{N}, +, \times, =)$ , было бы желательно уметь говорить о конечных *последовательностях* натуральных чисел, ибо тогда мы могли бы написать так:

«существует последовательность  $c_0, \dots, c_z$ , такая что  $c_0 = 1$ ,  $c_z = x$  и каждый следующий член вдвое больше предыдущего:  $\forall i < z \ c_{i+1} = 2 \cdot c_i$ ».

В этом нам поможет следующая функция.

**Определение.** *Бета-функция Гёделя* — это функция  $\beta: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  со следующим свойством: для любого  $n \geq 0$  и любой последовательности натуральных чисел  $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{N}$  существуют числа<sup>1</sup>  $a, b \in \mathbb{N}$ , такие что

$$\beta(a, b, 0) = c_0, \dots, \beta(a, b, n) = c_n.$$

Ответ: годится  $\beta(a, b, i) := \text{«остаток от деления } a \text{ на } b(i+1) + 1\text{»}$ . Почему? См.: Верещагин, Шень «Вычислимые функции» (2012), §10.3, Леммы 1 и 2.

**Лемма.** *График бета-функции Гёделя выразим в арифметическом языке.*

То есть существует арифметическая формула  $V(x, y, z, u)$ , выражающая отношение  $\beta(x, y, z) = u$ . Это очевидно, ведь отношение « $r$  есть остаток от деления  $p$  на  $q$ » легко выразить.

### Задачи

1. Используя бета-функцию Гёделя, выразите отношения  $x = 2^z$ ,  $x = y^z$ .

Указание: если бы в языке мы могли писать *терм*  $\beta(a, b, i)$ , то отношение  $x = 2^z$  мы бы выразили так:

$$\exists a \exists b \left[ \beta(a, b, 0) = 1 \wedge \beta(a, b, z) = x \wedge \forall i (i < z \rightarrow \beta(a, b, i+1) = 2 \cdot \beta(a, b, i)) \right].$$

Кроме того, в этой «формуле» используются константы 0, 1, 2, которых в языке нет (но они выразимы!). Перепишите данную «формулу», используя формулу  $V(x, y, z, u)$ , выражающую  $\beta$ -функцию Гёделя.

2. Используя бета-функцию Гёделя, запишите утверждения:

**а) малую теорему Ферма:**

*если  $p$  — простое число и  $a$  — любое число, то  $a^p - a$  делится на  $p$ .*

**б) великую теорему Ферма:**

*не существует таких  $n \geq 3$  и  $x, y, z \geq 1$ , что  $x^n + y^n = z^n$ .*

---

<sup>1</sup>То, что конечную последовательность приходится кодировать *двумя* числами  $a, b$ , не принципиально, а лишь следствие конкретной конструкции. Можно было бы и одним числом:  $\gamma(d, i) = c_i$ . Ведь пары чисел легко кодируются одним числом и наоборот (см. домашнюю задачу) и тогда « $\gamma(d, i) = c_i$ » мы выражаем так: « $d$  есть код некоторой пары чисел  $(a, b)$  и имеет место  $\beta(a, b, i) = c_i$ ».

## Выполнимые и общезначимые формулы

По аналогии с логикой высказываний, вводятся следующие понятия (только вместо «оценки переменных» говорим про «интерпретации»). Напомним, что *замкнутая формула* — это формула, в которой нет свободных переменных (то есть в ней все переменные связаны кванторами).

- Замкнутая формула  $A$  называется *общезначимой*, если она истинна во всех интерпретациях:  $\forall M M \models A$ .
- Замкнутая формула  $A$  называется *выполнимой*, если она истинна в некоторой интерпретации:  $\exists M M \models A$ .
- Две замкнутые формулы  $A$  и  $B$  называются *равносильными* (или *эквивалентными*), если в каждой интерпретации  $M$  имеем:  $M \models A$  тогда и только тогда, когда  $M \models B$ . Пишем:  $A \equiv B$ .

Для формул со свободными переменными можно дать те же определения, но вместо «интерпретации» нужно говорить «интерпретация  $M$  с оценкой переменных  $v$ ». Например, две (незамкнутые) формулы  $Q(x) \wedge R(x, y)$  и  $R(x, y) \wedge Q(x)$  равносильны, обе они — выполнимы, но не общезначимы.

К эквивалентностям, имевшимся в логике высказываний, в логике предикатов добавляются следующие.

### Основные эквивалентности

Двойственность кванторов:

$$\neg \exists x A(x) \equiv \forall x \neg A(x)$$

$$\neg \forall x A(x) \equiv \exists x \neg A(x)$$

Переименование связанной переменной ( $y$  — новая переменная):

$$\forall x A(x) \equiv \forall y A(y)$$

$$\exists x A(x) \equiv \exists y A(y)$$

Фиктивный квантор (переменная  $x$  не свободна в формуле  $A$ ):

$$\forall x A \equiv A$$

$$\exists x A \equiv A$$

Вынесение кванторов (переменная  $x$  не свободна в формуле  $B$ ):

$$\forall x A(x) \wedge B \equiv \forall x (A(x) \wedge B)$$

$$\forall x A(x) \vee B \equiv \forall x (A(x) \vee B)$$

$$\exists x A(x) \wedge B \equiv \exists x (A(x) \wedge B)$$

$$\exists x A(x) \vee B \equiv \exists x (A(x) \vee B)$$

Сокращение кванторов:

$$\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x (A(x) \wedge B(x))$$

$$\exists x A(x) \vee \exists x B(x) \equiv \exists x (A(x) \vee B(x))$$

## Задачи (письменное задание — не здесь, а далее!)

3. Являются ли следующие формулы выполнимыми? общезначимыми?
  - а)  $\exists x R(x, x)$ ;
  - б)  $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$ ;
  - в)  $\forall x \exists y R(x, y) \rightarrow \exists y \forall x R(x, y)$ ;
  - г)  $\forall x \exists y R(x, y) \leftarrow \exists y \forall x R(x, y)$ .
4. Уметь доказывать основные равносильности (рассматриваем произвольную интерпретацию  $M = (D, *)$  и рассуждаем об ее элементах).
5. Почему эквивалентностей «вынесения кванторов» — 4, а «сокращения кванторов» — только 2? Докажите, что недостающие два «закона» сокращения кванторов не являются общезначимыми.

6. Используя основные эквивалентности, сформулируйте закон «вынесения кванторов за импликацию» (здесь переменная  $x$  не свободна в  $B$ ):

- а)  $B \rightarrow \forall x A(x) \equiv \dots$                       в)  $\forall x A(x) \rightarrow B \equiv \dots$   
б)  $B \rightarrow \exists x A(x) \equiv \dots$                       г)  $\exists x A(x) \rightarrow B \equiv \dots$

7. Докажите, что следующая формула выполнима, но лишь в бесконечных интерпретациях:

$$\neg \exists x R(x, x) \wedge \forall x \exists y R(x, y) \wedge \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z)).$$

### Письменное домашнее задание

Решения следующих задач нужно сдать на отдельном листочке на ближайшем семинаре 11 / 13 ноября 2019 г.

1. Дана формула:  $\neg((\neg p \vee r) \rightarrow (p \wedge \neg q))$ .
  - а) Приведите ее к СДНФ, используя *осн. эквивалентности*.
  - б) Постройте для этой формулы таблицу истинности.
  - в) Постройте СДНФ по данной таблице истинности.  
Убедитесь, что ответы в пунктах (а) и (в) совпали.
2. Выразимы ли в структуре  $(\mathbb{Z}, a + b = c)$  отношения:
  - а) « $x$  — четное»;
  - б) « $x$  делится на 3»;
  - в) «остаток от деления  $x$  на 3 равен 1».

Если выразимо — предъявите формулу, в которой участвует *трёхместный* предикатный символ  $S(a, b, c)$ , означающий, что  $a + b = c$ ; если не выразимо — предъявите автоморфизм, не сохраняющий данное отношение.

3. Используя бета-функцию Гёделя, выразите в  $(\mathbb{N}, +, \times, =)$  отношения (выберите лишь **ОДИН** пункт):
  - а)  $y = x!$ ,
  - б)  $y$  есть  $x$ -ый член последовательности Фибоначчи,
  - в)  $y$  есть  $x$ -ое по порядку простое число.
4. Является ли данная формула выполнимой? общезначимой?

$$\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow \forall x P(x) \vee \exists x Q(x).$$

Ответ обоснуйте:

для выполнимости — приведите выполняющую интерпретацию;  
для общезначимости — проведите доказательство, что формула истинна в каждой интерпретации;  
для необщезначимости — приведите контрмодель.