

Введение в эпистемическую логику

Виталий Долгоруков

Международная лаборатория логики, лингвистики и формальной философии
НИУ ВШЭ

30 ноября 2023 г.

Знание и мнение

- ▶ Знание vs. мнение

Знание и мнение

- ▶ Знание vs. мнение
- ▶ Метазнание = знание о знании

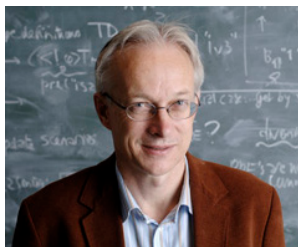
Знание и мнение

- ▶ Знание vs. мнение
- ▶ Метазнание = знание о знании
- ▶ Эпистемическая логика = логика знания (и метазнания)

Знание и мнение

- ▶ Знание vs. мнение
- ▶ Метазнание = знание о знании
- ▶ Эпистемическая логика = логика знания (и метазнания)
- ▶ Доксатическая логика = логика мнения (и метамнения)

Логика: от теории дедуктивных рассуждений к теории информационного обновления



Й. ван Бентем:

«Спрашивание и получение ответов являются такими же важными логическими формами деятельности, что и извлечение следствий!»

(Статическая) эпистемическая логика

(Статическая) эпистемическая логика

- ▶ агент i знает, что φ
 $K_i\varphi$

(Статическая) эпистемическая логика

- ▶ агент i знает, что φ
 $K_i\varphi$
- ▶ агент i не знает, что φ
 $\neg K_i\varphi$

(Статическая) эпистемическая логика

- ▶ агент i знает, что φ
 $K_i\varphi$
- ▶ агент i не знает, что φ
 $\neg K_i\varphi$
- ▶ агент i знает, что $\neg\varphi$
 $K_i\neg\varphi$

(Статическая) эпистемическая логика

- ▶ агент i знает, что φ
 $K_i\varphi$
- ▶ агент i не знает, что φ
 $\neg K_i\varphi$
- ▶ агент i знает, что $\neg\varphi$
 $K_i\neg\varphi$
- ▶ агент i не знает, что $\neg\varphi$
агент i допускает, что φ
 $\neg K_i\neg\varphi$

(Статическая) эпистемическая логика

- ▶ агент i знает, что φ
 $K_i\varphi$
- ▶ агент i не знает, что φ
 $\neg K_i\varphi$
- ▶ агент i знает, что $\neg\varphi$
 $K_i\neg\varphi$
- ▶ агент i не знает, что $\neg\varphi$
агент i допускает, что φ
 $\neg K_i\neg\varphi$

(Статическая) эпистемическая логика

- ▶ агент i знает, что φ
 $K_i\varphi$
- ▶ агент i не знает, что φ
 $\neg K_i\varphi$
- ▶ агент i знает, что $\neg\varphi$
 $K_i\neg\varphi$
- ▶ агент i не знает, что $\neg\varphi$
агент i допускает, что φ
 $\neg K_i\neg\varphi = \hat{K}_i\varphi$

Правильно построенная формула

Определение 3.1 (Язык эпистемической логики)

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid K_i\varphi \mid \hat{K}_i\varphi$$

Исчисление

Исчисление

Taut Тавтологии классической логики высказываний

Исчисление

Taut Тавтологии классической логики высказываний

$$K \quad K_i(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (K_i\varphi \rightarrow K_i\psi)$$

Исчисление

Taut Тавтологии классической логики высказываний

K $K_i(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (K_i\varphi \rightarrow K_i\psi)$

T $K_i\varphi \rightarrow \varphi$

Исчисление

Taut Тавтологии классической логики высказываний

$$K \quad K_i(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (K_i\varphi \rightarrow K_i\psi)$$

$$T \quad K_i\varphi \rightarrow \varphi$$

$$4 \quad K_i\varphi \rightarrow K_iK_i\varphi$$

Исчисление

Taut Тавтологии классической логики высказываний

$$K \quad K_i(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (K_i\varphi \rightarrow K_i\psi)$$

$$T \quad K_i\varphi \rightarrow \varphi$$

$$4 \quad K_i\varphi \rightarrow K_iK_i\varphi$$

$$5 \quad \neg K_i\varphi \rightarrow K_i\neg K_i\varphi$$

Исчисление

Taut Тавтологии классической логики высказываний

$$K \quad K_i(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (K_i\varphi \rightarrow K_i\psi)$$

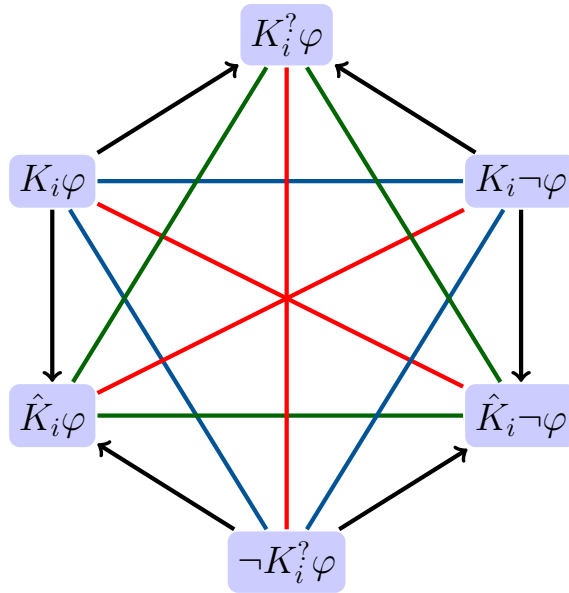
$$T \quad K_i\varphi \rightarrow \varphi$$

$$4 \quad K_i\varphi \rightarrow K_iK_i\varphi$$

$$5 \quad \neg K_i\varphi \rightarrow K_i\neg K_i\varphi$$

$$G \quad \frac{\vdash \varphi}{\vdash K_i\varphi}$$

Эпистемический шестиугольник



Модель Крипке

Определение 3.2

(Эпистемической) моделью Крипке называется тройка $\mathcal{M} = (W, (\sim_i)_{i \in Ag}, V)$, где

- ▶ $W \neq \emptyset$ – множество возможных миров (ситуаций)
- ▶ \sim_i – отношение на W для $i \in Ag$ ¹
- ▶ $V : Prop \rightarrow \mathcal{P}(W)$ ²

¹Здесь Ag – конечное множество агентов.

²Здесь $Prop = \{p, q, r, p_1, p_2, \dots\}$ – множество пропозициональных переменных, $\mathcal{P}(\dots)$ – операция взятия множества всех подмножеств.

Истинность в модели

Определение 3.3

- ▶ $\mathcal{M}, w \models p$ е.т.е. $w \in V(p)$
- ▶ $\mathcal{M}, w \models \varphi \wedge \psi$ е.т.е. $\mathcal{M}, w \models \varphi$ и $\mathcal{M}, w \models \psi$
- ▶ $\mathcal{M}, w \models \neg\varphi$ е.т.е. $\mathcal{M}, w \not\models \varphi$
- ▶ для \vee и \rightarrow – аналогично
- ▶ $\mathcal{M}, w \models K_i\varphi$ е.т.е. $\forall w'(w \sim_i w' \rightarrow \mathcal{M}, w' \models \varphi)$
- ▶ $\mathcal{M}, w \models \hat{K}_i\varphi$ е.т.е. $\exists w'(w \sim_i w' \wedge \mathcal{M}, w' \models \varphi)$

Ограничения на \sim_i в стандартной эпистемической модели Крипке (класс моделей $S5_m$)

► $K_i\varphi \rightarrow \varphi$

Ограничения на \sim_i в стандартной эпистемической модели Крипке (класс моделей $S5_m$)

- ▶ $K_i\varphi \rightarrow \varphi$
- ▶ $\forall w'(w' \sim_i w')$

Ограничения на \sim_i в стандартной эпистемической модели Крипке (класс моделей $S5_m$)

- ▶ $K_i\varphi \rightarrow \varphi$
- ▶ $\forall w'(w' \sim_i w')$
- ▶ $K_i\varphi \rightarrow K_iK_i\varphi$

Ограничения на \sim_i в стандартной эпистемической модели Крипке (класс моделей $S5_m$)

- ▶ $K_i\varphi \rightarrow \varphi$
- ▶ $\forall w'(w' \sim_i w')$
- ▶ $K_i\varphi \rightarrow K_iK_i\varphi$
- ▶ $\forall w'\forall w''\forall w'''((w' \sim_i w'' \wedge w'' \sim_i w''') \rightarrow w' \sim_i w''')$

Ограничения на \sim_i в стандартной эпистемической модели Крипке (класс моделей $S5_m$)

- ▶ $K_i\varphi \rightarrow \varphi$
- ▶ $\forall w'(w' \sim_i w')$
- ▶ $K_i\varphi \rightarrow K_iK_i\varphi$
- ▶ $\forall w'\forall w''\forall w'''((w' \sim_i w'' \wedge w'' \sim_i w''') \rightarrow w' \sim_i w''')$
- ▶ $\neg K_i\varphi \rightarrow K_i\neg K_i\varphi$

Ограничения на \sim_i в стандартной эпистемической модели Крипке (класс моделей $S5_m$)

- ▶ $K_i\varphi \rightarrow \varphi$
- ▶ $\forall w'(w' \sim_i w')$
- ▶ $K_i\varphi \rightarrow K_iK_i\varphi$
- ▶ $\forall w'\forall w''\forall w'''((w' \sim_i w'' \wedge w'' \sim_i w''') \rightarrow w' \sim_i w''')$
- ▶ $\neg K_i\varphi \rightarrow K_i\neg K_i\varphi$
- ▶ $\forall w'\forall w''((w' \sim_i w'' \wedge w' \sim_i w''') \rightarrow w'' \sim_i w''')$

a знает, что p

$$\mathcal{M}_1, w_1 \models K_a p$$

a знает, что p

$$\mathcal{M}_1, w_1 \models K_a p$$

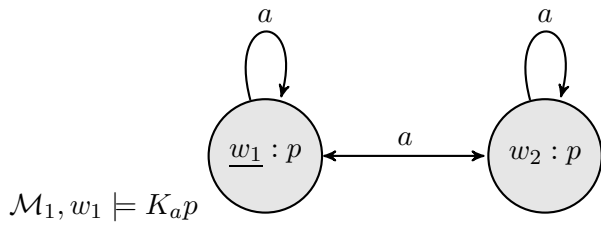
a знает, что p

$$\mathcal{M}_1, w_1 \models K_a p$$

a знает, что p

$$\mathcal{M}_1, w_1 \models K_a p$$

a знает, что p



a не знает, что p

a не знает, что p

$$\mathcal{M}_2, w_1 \models \neg K_a p$$

a не знает, что p

$$\mathcal{M}_2, w_1 \models \neg K_a p$$

a не знает, что p

$$\mathcal{M}_2, w_1 \models \neg K_a p$$

a не знает, что p

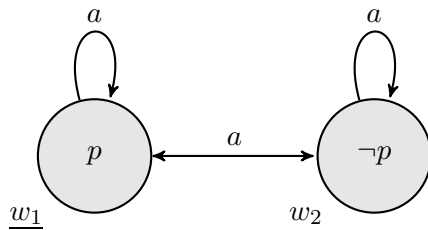
$$\mathcal{M}_2, w_1 \models \neg K_a p$$

a не знает, что p

$$\mathcal{M}_2, w_1 \models \neg K_a p$$

a не знает, что p

$\mathcal{M}_2, w_1 \models \neg K_a p$



Пример 4: «Пьеро и Мальвина»

«Пьеро любит Мальвину (l), но она об этом не знает»

Пример 4: «Пьеро и Мальвина»

«Пьеро любит Мальвину (l), но она об этом не знает»

$$l \wedge K_p l \wedge \neg K_m l \wedge \neg K_m \neg l$$

Пример 4: «Пьеро и Мальвина»

«Пьеро любит Мальвину (l), но она об этом не знает»

$$l \wedge K_p l \wedge \neg K_m l \wedge \neg K_m \neg l$$

Пример 4: «Пьеро и Мальвина»

«Пьеро любит Мальвину (l), но она об этом не знает»

$$l \wedge K_p l \wedge \neg K_m l \wedge \neg K_m \neg l$$

Пример 4: «Пьеро и Мальвина»

«Пьеро любит Мальвину (l), но она об этом не знает»

$$l \wedge K_p l \wedge \neg K_m l \wedge \neg K_m \neg l$$

Пример 4: «Пьеро и Мальвина»

«Пьеро любит Мальвину (l), но она об этом не знает»

$$l \wedge K_p l \wedge \neg K_m l \wedge \neg K_m \neg l$$

Пример 4: «Пьеро и Мальвина»

«Пьеро любит Мальвину (l), но она об этом не знает»

$$l \wedge K_p l \wedge \neg K_m l \wedge \neg K_m \neg l$$

Пример 4: «Пьеро и Мальвина»

«Пьеро любит Мальвину (l), но она об этом не знает»

$$l \wedge K_p l \wedge \neg K_m l \wedge \neg K_m \neg l$$

Пример 4: «Пьеро и Мальвина»

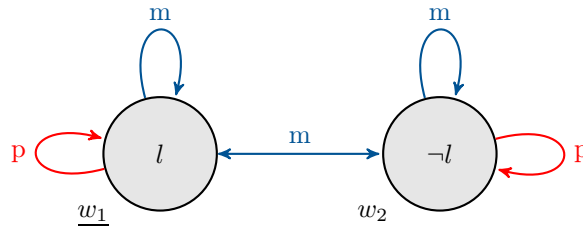
«Пьеро любит Мальвину (l), но она об этом не знает»

$$l \wedge K_p l \wedge \neg K_m l \wedge \neg K_m \neg l$$

Пример 4: «Пьеро и Мальвина»

«Пьеро любит Мальвину (l), но она об этом не знает»

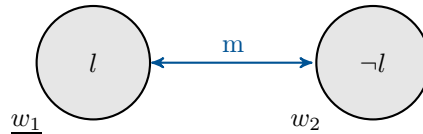
$$l \wedge K_p l \wedge \neg K_m l \wedge \neg K_m \neg l$$



Пример 4: «Пьеро и Мальвина»

«Пьеро любит Мальвину (l), но она об этом не знает»

$$l \wedge K_p l \wedge \neg K_m l \wedge \neg K_m \neg l$$



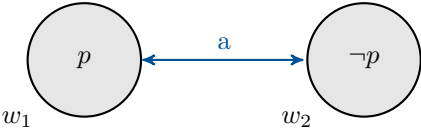
Петли подразумеваются во всех мирах для всех агентов, их можно не изображать.

Пример 5: «прагматика вопроса»

a спрашивает у *b*: «это здание Вышки?»

Пример 5: «прагматика вопроса»

a спрашивает у b : «это здание Вышки?»



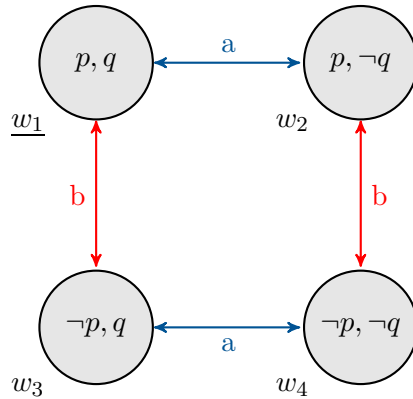
Пример 6: «сложные отношения»

Пример 6: «сложные отношения»

«Аня любит Борю, но он об этом не знает, а Боря любит Аню, но она об этом не знает»

Пример 6: «сложные отношения»

«Аня любит Борю, но он об этом не знает, а Боря любит Аню, но она об этом не знает»



Формулы и модели

Упражнение

Построить модель для следующих формул (или доказать, что это невозможно)

Формулы и модели

Упражнение

Построить модель для следующих формул (или доказать, что это невозможно)

1. $\neg K_a \varphi \wedge K_b \varphi$

Формулы и модели

Упражнение

Построить модель для следующих формул (или доказать, что это невозможно)

1. $\neg K_a \varphi \wedge K_b \varphi$

2. $\neg K_a \varphi \wedge \varphi$

Формулы и модели

Упражнение

Построить модель для следующих формул (или доказать, что это невозможно)

1. $\neg K_a \varphi \wedge K_b \varphi$
2. $\neg K_a \varphi \wedge \varphi$
3. $K_a \varphi \wedge \neg \varphi$

Формулы и модели

Упражнение

Построить модель для следующих формул (или доказать, что это невозможно)

1. $\neg K_a \varphi \wedge K_b \varphi$

2. $\neg K_a \varphi \wedge \varphi$

3. $K_a \varphi \wedge \neg \varphi$

4. $\hat{K}_a \varphi \wedge \neg \varphi$

Формулы и модели

Упражнение

Построить модель для следующих формул (или доказать, что это невозможно)

1. $\neg K_a \varphi \wedge K_b \varphi$
2. $\neg K_a \varphi \wedge \varphi$
3. $K_a \varphi \wedge \neg \varphi$
4. $\hat{K}_a \varphi \wedge \neg \varphi$
5. $K_a \varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg K_a \psi$

Формулы и модели

Упражнение

Построить модель для следующих формул (или доказать, что это невозможно)

1. $\neg K_a \varphi \wedge K_b \varphi$

2. $\neg K_a \varphi \wedge \varphi$

3. $K_a \varphi \wedge \neg \varphi$

4. $\hat{K}_a \varphi \wedge \neg \varphi$

5. $K_a \varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg K_a \psi$

6. $K_a \varphi \wedge K_a(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg K_a \psi$

Формулы и модели

Упражнение

Построить модель для следующих формул (или доказать, что это невозможно)

1. $\neg K_a \varphi \wedge K_b \varphi$

2. $\neg K_a \varphi \wedge \varphi$

3. $K_a \varphi \wedge \neg \varphi$

4. $\hat{K}_a \varphi \wedge \neg \varphi$

5. $K_a \varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg K_a \psi$

6. $K_a \varphi \wedge K_a(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg K_a \psi$

7. $\hat{K}_a \varphi \wedge \hat{K}_a \neg \varphi$

Формулы и модели

Упражнение

Построить модель для следующих формул (или доказать, что это невозможно)

1. $\neg K_a \varphi \wedge K_b \varphi$

2. $\neg K_a \varphi \wedge \varphi$

3. $K_a \varphi \wedge \neg \varphi$

4. $\hat{K}_a \varphi \wedge \neg \varphi$

5. $K_a \varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg K_a \psi$

6. $K_a \varphi \wedge K_a(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg K_a \psi$

7. $\hat{K}_a \varphi \wedge \hat{K}_a \neg \varphi$

8. $K_a K_b \varphi \wedge \neg K_a \varphi$

Формулы и модели

Упражнение

Построить модель для следующих формул (или доказать, что это невозможно)

1. $\neg K_a \varphi \wedge K_b \varphi$

2. $\neg K_a \varphi \wedge \varphi$

3. $K_a \varphi \wedge \neg \varphi$

4. $\hat{K}_a \varphi \wedge \neg \varphi$

5. $K_a \varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg K_a \psi$

6. $K_a \varphi \wedge K_a(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg K_a \psi$

7. $\hat{K}_a \varphi \wedge \hat{K}_a \neg \varphi$

8. $K_a K_b \varphi \wedge \neg K_a \varphi$

9. $K_a K_b \varphi \wedge \neg K_b K_a \varphi$

Формулы и модели

Упражнение

Построить модель для следующих формул (или доказать, что это невозможно)

1. $\neg K_a \varphi \wedge K_b \varphi$

2. $\neg K_a \varphi \wedge \varphi$

3. $K_a \varphi \wedge \neg \varphi$

4. $\hat{K}_a \varphi \wedge \neg \varphi$

5. $K_a \varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg K_a \psi$

6. $K_a \varphi \wedge K_a(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg K_a \psi$

7. $\hat{K}_a \varphi \wedge \hat{K}_a \neg \varphi$

8. $K_a K_b \varphi \wedge \neg K_a \varphi$

9. $K_a K_b \varphi \wedge \neg K_b K_a \varphi$

10. $K_b K_a \varphi \wedge K_a K_b \varphi \wedge \neg K_a K_b K_a \varphi$

Какие аксиомы нужны?

Фактичность, позитивная интроспекция, негативная интроспекция

Групповое знание

Итерация знания

Групповое знание

Итерация знания

$$K_i^n \varphi := \underbrace{K_i \dots K_i}_n \varphi$$

Групповое знание

Итерация знания

$$K_i^n \varphi := \underbrace{K_i \dots K_i}_n \varphi$$

Пример

Групповое знание

Итерация знания

$$K_i^n \varphi := \underbrace{K_i \dots K_i}_n \varphi$$

Пример

$$K_a^3 \varphi = K_a K_a K_a \varphi$$

Групповое знание

Итерация знания

$$K_i^n \varphi := \underbrace{K_i \dots K_i}_n \varphi$$

Пример

$$K_a^3 \varphi = K_a K_a K_a \varphi$$

Для любого i верно, что $K_i^n \varphi = K_i \varphi$

«Все знают» (распространенное знание)

Распространенное знание:

$$E_G \varphi := \bigwedge_{i \in G} K_i \varphi$$

«Все знают» (распространенное знание)

Распространенное знание:

$$E_G\varphi := \bigwedge_{i \in G} K_i\varphi$$

Пример

«Все знают» (распространенное знание)

Распространенное знание:

$$E_G\varphi := \bigwedge_{i \in G} K_i\varphi$$

Пример

$$E_{ab}\varphi = K_a\varphi \wedge K_b\varphi$$

«Все знают»

Что значит $E_{ab}^2 \varphi$?

«Все знают»

Что значит $E_{ab}^2\varphi$?

$$E_{ab}^2\varphi = E_{ab}E_{ab}\varphi$$

«Все знают»

Что значит $E_{ab}^2\varphi$?

$$E_{ab}^2\varphi = E_{ab}E_{ab}\varphi = E_{ab}(K_a\varphi \wedge K_b\varphi)$$

«Все знают»

Что значит $E_{ab}^2\varphi$?

$$E_{ab}^2\varphi = E_{ab}E_{ab}\varphi = E_{ab}(K_a\varphi \wedge K_b\varphi) = K_aK_b\varphi \wedge K_bK_a\varphi \wedge K_aK_a\varphi \wedge K_bK_b\varphi$$

«Все знают»

Что значит $E_{ab}^2\varphi$?

$$\begin{aligned} E_{ab}^2\varphi &= E_{ab}E_{ab}\varphi = E_{ab}(K_a\varphi \wedge K_b\varphi) = K_aK_b\varphi \wedge K_bK_a\varphi \wedge K_aK_a\varphi \wedge K_bK_b\varphi \\ &= K_a\varphi \wedge K_b\varphi \wedge K_aK_b\varphi \wedge K_bK_a\varphi \end{aligned}$$

«Все знают»

Что значит $E_{ab}^2\varphi$?

$$\begin{aligned} E_{ab}^2\varphi &= E_{ab}E_{ab}\varphi = E_{ab}(K_a\varphi \wedge K_b\varphi) = K_aK_b\varphi \wedge K_bK_a\varphi \wedge K_aK_a\varphi \wedge K_bK_b\varphi \\ &= K_a\varphi \wedge K_b\varphi \wedge K_aK_b\varphi \wedge K_bK_a\varphi \end{aligned}$$

«Все знают»

Что значит $E_{ab}^2\varphi$?

$$\begin{aligned} E_{ab}^2\varphi &= E_{ab}E_{ab}\varphi = E_{ab}(K_a\varphi \wedge K_b\varphi) = K_aK_b\varphi \wedge K_bK_a\varphi \wedge K_aK_a\varphi \wedge K_bK_b\varphi \\ &= K_a\varphi \wedge K_b\varphi \wedge K_aK_b\varphi \wedge K_bK_a\varphi \end{aligned}$$

Упражнение:

Построить модель для формулы: $E_{ab} \wedge \neg E_{ab}^2$

«Общее знание»

«Общее знание» («common knowledge»)

$$C_G\varphi := \bigwedge_{i=0}^{\infty} E_G^i\varphi = \varphi \wedge E_G\varphi \wedge E_G^2\varphi \wedge E_G^3\varphi\dots$$

Пример 7: «Дед Мороз»

Ситуация:

Пятилетний Андрюша уже знает, что Деда Мороза не существует

Пример 7: «Дед Мороз»

Ситуация:

Пятилетний Андрюша уже знает, что Деда Мороза не существует и он знает, что папа (Борис) знает, что Деда Мороза не существует.

Пример 7: «Дед Мороз»

Ситуация:

Пятилетний Андрюша уже знает, что Деда Мороза не существует и он знает, что папа (Борис) знает, что Деда Мороза не существует. Папа знает, что Андрюша знает правду о Деде Морозе.

Пример 7: «Дед Мороз»

Ситуация:

Пятилетний Андрюша уже знает, что Деда Мороза не существует и он знает, что папа (Борис) знает, что Деда Мороза не существует. Папа знает, что Андрюша знает правду о Деде Морозе. Но Андрюша пока не знает, знает ли папа, что он уже знает правду.

Пример 7: «Дед Мороз»

Ситуация:

Пятилетний Андрюша уже знает, что Деда Мороза не существует и он знает, что папа (Борис) знает, что Деда Мороза не существует. Папа знает, что Андрюша знает правду о Деде Морозе. Но Андрюша пока не знает, знает ли папа, что он уже знает правду.

Формализация:

Пример 7: «Дед Мороз»

Ситуация:

Пятилетний Андрюша уже знает, что Деда Мороза не существует и он знает, что папа (Борис) знает, что Деда Мороза не существует. Папа знает, что Андрюша знает правду о Деде Морозе. Но Андрюша пока не знает, знает ли папа, что он уже знает правду.

Формализация:

1. K_{ap}

Пример 7: «Дед Мороз»

Ситуация:

Пятилетний Андрюша уже знает, что Деда Мороза не существует и он знает, что папа (Борис) знает, что Деда Мороза не существует. Папа знает, что Андрюша знает правду о Деде Морозе. Но Андрюша пока не знает, знает ли папа, что он уже знает правду.

Формализация:

1. $K_a p$
2. $K_b p$

Пример 7: «Дед Мороз»

Ситуация:

Пятилетний Андрюша уже знает, что Деда Мороза не существует и он знает, что папа (Борис) знает, что Деда Мороза не существует. Папа знает, что Андрюша знает правду о Деде Морозе. Но Андрюша пока не знает, знает ли папа, что он уже знает правду.

Формализация:

1. $K_a p$
2. $K_b p$
3. $E_{ab} p$

Пример 7: «Дед Мороз»

Ситуация:

Пятилетний Андрюша уже знает, что Деда Мороза не существует и он знает, что папа (Борис) знает, что Деда Мороза не существует. Папа знает, что Андрюша знает правду о Деде Морозе. Но Андрюша пока не знает, знает ли папа, что он уже знает правду.

Формализация:

1. $K_a p$

2. $K_b p$

3. $E_{ab} p$

4. $K_a K_b p$

Пример 7: «Дед Мороз»

Ситуация:

Пятилетний Андрюша уже знает, что Деда Мороза не существует и он знает, что папа (Борис) знает, что Деда Мороза не существует. Папа знает, что Андрюша знает правду о Деде Морозе. Но Андрюша пока не знает, знает ли папа, что он уже знает правду.

Формализация:

1. $K_a p$
2. $K_b p$
3. $E_{ab} p$
4. $K_a K_b p$
5. $K_b K_a p$

Пример 7: «Дед Мороз»

Ситуация:

Пятилетний Андрюша уже знает, что Деда Мороза не существует и он знает, что папа (Борис) знает, что Деда Мороза не существует. Папа знает, что Андрюша знает правду о Деде Морозе. Но Андрюша пока не знает, знает ли папа, что он уже знает правду.

Формализация:

1. $K_a p$
2. $K_b p$
3. $E_{ab} p$
4. $K_a K_b p$
5. $K_b K_a p$
6. $E_{ab}^2 p$

Пример 7: «Дед Мороз»

Ситуация:

Пятилетний Андрюша уже знает, что Деда Мороза не существует и он знает, что папа (Борис) знает, что Деда Мороза не существует. Папа знает, что Андрюша знает правду о Деде Морозе. Но Андрюша пока не знает, знает ли папа, что он уже знает правду.

Формализация:

1. $K_a p$

2. $K_b p$

3. $E_{ab} p$

4. $K_a K_b p$

5. $K_b K_a p$

6. $E_{ab}^2 p$

7. $\neg K_a K_b K_a p$

Пример 7: «Дед Мороз»

Ситуация:

Пятилетний Андрюша уже знает, что Деда Мороза не существует и он знает, что папа (Борис) знает, что Деда Мороза не существует. Папа знает, что Андрюша знает правду о Деде Морозе. Но Андрюша пока не знает, знает ли папа, что он уже знает правду.

Формализация:

1. $K_a p$

2. $K_b p$

3. $E_{ab} p$

4. $K_a K_b p$

5. $K_b K_a p$

6. $E_{ab}^2 p$

7. $\neg K_a K_b K_a p$

8. $\neg E_{ab}^3 p$

Пример 7: «Дед Мороз»

Ситуация:

Пятилетний Андрюша уже знает, что Деда Мороза не существует и он знает, что папа (Борис) знает, что Деда Мороза не существует. Папа знает, что Андрюша знает правду о Деде Морозе. Но Андрюша пока не знает, знает ли папа, что он уже знает правду.

Формализация:

1. $K_a p$

2. $K_b p$

3. $E_{ab} p$

4. $K_a K_b p$

5. $K_b K_a p$

6. $E_{ab}^2 p$

7. $\neg K_a K_b K_a p$

8. $\neg E_{ab}^3 p$

9. $\neg C_{ab} p$

Пример 8: «Сплетни»

Ситуация:

Аня рассказала Боре страшный секрет (p). Боря рассказал его Свете, но попросил Свету не рассказывать об этом Ане. Света ничего не сказала Ане.

Пример 8: «Сплетни»

Ситуация:

Аня рассказала Боре страшный секрет (p). Боря рассказал его Свете, но попросил Свету не рассказывать об этом Ане. Света ничего не сказала Ане.

Формализация:

1. K_{ap}

Пример 8: «Сплетни»

Ситуация:

Аня рассказала Боре страшный секрет (p). Боря рассказал его Свете, но попросил Свету не рассказывать об этом Ане. Света ничего не сказала Ане.

Формализация:

1. K_{ap}
2. K_{bp}

Пример 8: «Сплетни»

Ситуация:

Аня рассказала Боре страшный секрет (p). Боря рассказал его Свете, но попросил Свету не рассказывать об этом Ане. Света ничего не сказала Ане.

Формализация:

1. K_{ap}
2. K_{bp}
3. K_{cp}

Пример 8: «Сплетни»

Ситуация:

Аня рассказала Боре страшный секрет (p). Боря рассказал его Свете, но попросил Свету не рассказывать об этом Ане. Света ничего не сказала Ане.

Формализация:

1. $K_a p$
2. $K_b p$
3. $K_c p$
4. $E_{abc} p$

Пример 8: «Сплетни»

Ситуация:

Аня рассказала Боре страшный секрет (p). Боря рассказал его Свете, но попросил Свету не рассказывать об этом Ане. Света ничего не сказала Ане.

Формализация:

1. $K_a p$
2. $K_b p$
3. $K_c p$
4. $E_{abc} p$
5. $K_a K_b p$

Пример 8: «Сплетни»

Ситуация:

Аня рассказала Боре страшный секрет (p). Боря рассказал его Свете, но попросил Свету не рассказывать об этом Ане. Света ничего не сказала Ане.

Формализация:

1. $K_a p$
2. $K_b p$
3. $K_c p$
4. $E_{abc} p$
5. $K_a K_b p$
6. $K_b K_a p$

Пример 8: «Сплетни»

Ситуация:

Аня рассказала Боре страшный секрет (p). Боря рассказал его Свете, но попросил Свету не рассказывать об этом Ане. Света ничего не сказала Ане.

Формализация:

1. $K_a p$
2. $K_b p$
3. $K_c p$
4. $E_{abc} p$
5. $K_a K_b p$
6. $K_b K_a p$
7. $K_a K_b K_a p$

Пример 8: «Сплетни»

Ситуация:

Аня рассказала Боре страшный секрет (p). Боря рассказал его Свете, но попросил Свету не рассказывать об этом Ане. Света ничего не сказала Ане.

Формализация:

1. $K_a p$
2. $K_b p$
3. $K_c p$
4. $E_{abc} p$
5. $K_a K_b p$
6. $K_b K_a p$
7. $K_a K_b K_a p$
8. $K_b K_a K_b p$

Пример 8: «Сплетни»

Ситуация:

Аня рассказала Боре страшный секрет (p). Боря рассказал его Свете, но попросил Свету не рассказывать об этом Ане. Света ничего не сказала Ане.

Формализация:

1. $K_a p$
2. $K_b p$
3. $K_c p$
4. $E_{abc} p$
5. $K_a K_b p$
6. $K_b K_a p$
7. $K_a K_b K_a p$
8. $K_b K_a K_b p$
9. $E_{ab}^{10} p$

Пример 8: «Сплетни»

Ситуация:

Аня рассказала Боре страшный секрет (p). Боря рассказал его Свете, но попросил Свету не рассказывать об этом Ане. Света ничего не сказала Ане.

Формализация:

1. $K_a p$
2. $K_b p$
3. $K_c p$
4. $E_{abc} p$
5. $K_a K_b p$
6. $K_b K_a p$
7. $K_a K_b K_a p$
8. $K_b K_a K_b p$
9. $E_{ab}^{10} p$
10. $C_{ab} p$

Пример 8: «Сплетни»

Ситуация:

Аня рассказала Боре страшный секрет (p). Боря рассказал его Свете, но попросил Свету не рассказывать об этом Ане. Света ничего не сказала Ане.

Формализация:

1. $K_a p$
2. $K_b p$
3. $K_c p$
4. $E_{abc} p$
5. $K_a K_b p$
6. $K_b K_a p$
7. $K_a K_b K_a p$
8. $K_b K_a K_b p$
9. $E_{ab}^{10} p$
10. $C_{ab} p$
11. $K_b K_c K_b K_c p$

Пример 8: «Сплетни»

Ситуация:

Аня рассказала Боре страшный секрет (p). Боря рассказал его Свете, но попросил Свету не рассказывать об этом Ане. Света ничего не сказала Ане.

Формализация:

1. $K_a p$
2. $K_b p$
3. $K_c p$
4. $E_{abc} p$
5. $K_a K_b p$
6. $K_b K_a p$
7. $K_a K_b K_a p$
8. $K_b K_a K_b p$
9. $E_{ab}^{10} p$
10. $C_{ab} p$
11. $K_b K_c K_b K_c p$
12. $E_{bc}^{100} p$

Пример 8: «Сплетни»

Ситуация:

Аня рассказала Боре страшный секрет (p). Боря рассказал его Свете, но попросил Свету не рассказывать об этом Ане. Света ничего не сказала Ане.

Формализация:

- | | | |
|----------------|-------------------------|----------------|
| 1. $K_a p$ | 7. $K_a K_b K_a p$ | 13. $C_{bc} p$ |
| 2. $K_b p$ | 8. $K_b K_a K_b p$ | |
| 3. $K_c p$ | 9. $E_{ab}^{10} p$ | |
| 4. $E_{abc} p$ | 10. $C_{ab} p$ | |
| 5. $K_a K_b p$ | 11. $K_b K_c K_b K_c p$ | |
| 6. $K_b K_a p$ | 12. $E_{bc}^{100} p$ | |

Пример 8: «Сплетни»

Ситуация:

Аня рассказала Боре страшный секрет (p). Боря рассказал его Свете, но попросил Свету не рассказывать об этом Ане. Света ничего не сказала Ане.

Формализация:

- | | | |
|----------------|-------------------------|----------------------|
| 1. $K_a p$ | 7. $K_a K_b K_a p$ | 13. $C_{bc} p$ |
| 2. $K_b p$ | 8. $K_b K_a K_b p$ | 14. $\neg K_a K_c p$ |
| 3. $K_c p$ | 9. $E_{ab}^{10} p$ | |
| 4. $E_{abc} p$ | 10. $C_{ab} p$ | |
| 5. $K_a K_b p$ | 11. $K_b K_c K_b K_c p$ | |
| 6. $K_b K_a p$ | 12. $E_{bc}^{100} p$ | |

Пример 8: «Сплетни»

Ситуация:

Аня рассказала Боре страшный секрет (p). Боря рассказал его Свете, но попросил Свету не рассказывать об этом Ане. Света ничего не сказала Ане.

Формализация:

- | | | |
|----------------|-------------------------|-----------------------|
| 1. $K_a p$ | 7. $K_a K_b K_a p$ | 13. $C_{bc} p$ |
| 2. $K_b p$ | 8. $K_b K_a K_b p$ | 14. $\neg K_a K_c p$ |
| 3. $K_c p$ | 9. $E_{ab}^{10} p$ | 15. $\neg E_{ac}^2 p$ |
| 4. $E_{abc} p$ | 10. $C_{ab} p$ | |
| 5. $K_a K_b p$ | 11. $K_b K_c K_b K_c p$ | |
| 6. $K_b K_a p$ | 12. $E_{bc}^{100} p$ | |

Пример 8: «Сплетни»

Ситуация:

Аня рассказала Боре страшный секрет (p). Боря рассказал его Свете, но попросил Свету не рассказывать об этом Ане. Света ничего не сказала Ане.

Формализация:

1. $K_a p$

2. $K_b p$

3. $K_c p$

4. $E_{abc} p$

5. $K_a K_b p$

6. $K_b K_a p$

7. $K_a K_b K_a p$

8. $K_b K_a K_b p$

9. $E_{ab}^{10} p$

10. $C_{ab} p$

11. $K_b K_c K_b K_c p$

12. $E_{bc}^{100} p$

13. $C_{bc} p$

14. $\neg K_a K_c p$

15. $\neg E_{ac}^2 p$

16. $\neg C_{ac} p$

Пример 8: «Сплетни»

Ситуация:

Аня рассказала Боре страшный секрет (p). Боря рассказал его Свете, но попросил Свету не рассказывать об этом Ане. Света ничего не сказала Ане.

Формализация:

1. $K_a p$

2. $K_b p$

3. $K_c p$

4. $E_{abc} p$

5. $K_a K_b p$

6. $K_b K_a p$

7. $K_a K_b K_a p$

8. $K_b K_a K_b p$

9. $E_{ab}^{10} p$

10. $C_{ab} p$

11. $K_b K_c K_b K_c p$

12. $E_{bc}^{100} p$

13. $C_{bc} p$

14. $\neg K_a K_c p$

15. $\neg E_{ac}^2 p$

16. $\neg C_{ac} p$

17. $\neg C_{abc} p$

«Дистрибутивное (распределенное) знание»

«Дистрибутивное (распределенное) знание»:

знание, которое есть у группы потенциально, если бы все агенты обменялись информацией

«Дистрибутивное (распределенное) знание»

«Дистрибутивное (распределенное) знание»:

знание, которое есть у группы потенциально, если бы все агенты обменялись информацией

Пример

«Дистрибутивное (распределенное) знание»

«Дистрибутивное (распределенное) знание»:

знание, которое есть у группы потенциально, если бы все агенты обменялись информацией

Пример

$$K_a\varphi \wedge K_b(\varphi \rightarrow \psi)$$
$$D_{ab}\psi$$

Определения форм группового знания

Групповое отношение достижимости

Определения форм группового знания

Групповое отношение достижимости

$$\blacktriangleright R_{E_G} := \bigcup_{i \in G} \sim_i$$

Определения форм группового знания

Групповое отношение достижимости

$$\blacktriangleright R_{E_G} := \bigcup_{i \in G} \sim_i$$

$$\blacktriangleright R_{D_G} := \bigcap_{i \in G} \sim_i$$

Определения форм группового знания

Групповое отношение достижимости

▶ $R_{E_G} := \bigcup_{i \in G} \sim_i$

▶ $R_{D_G} := \bigcap_{i \in G} \sim_i$

▶ $R_{C_G} := \left(\bigcup_{i \in G} \sim_i \right)^*$, т.е. рефлексивное транзитивное замыкание отношения R_{E_G}

Определения форм группового знания

Групповое отношение достижимости

$$\blacktriangleright R_{E_G} := \bigcup_{i \in G} \sim_i$$

$$\blacktriangleright R_{D_G} := \bigcap_{i \in G} \sim_i$$

$$\blacktriangleright R_{C_G} := \left(\bigcup_{i \in G} \sim_i \right)^*, \text{ т.е. рефлексивное транзитивное замыкание отношения } R_{E_G}$$

Определения форм группового знания

Групповое отношение достижимости

▶ $R_{E_G} := \bigcup_{i \in G} \sim_i$

▶ $R_{D_G} := \bigcap_{i \in G} \sim_i$

▶ $R_{C_G} := \left(\bigcup_{i \in G} \sim_i \right)^*$, т.е. рефлексивное транзитивное замыкание отношения R_{E_G}

(Пример транзитивного замыкания: Пусть R – отношение «быть родителем», тогда транзитивное замыкание этого отношения – отношение «быть предком»).

Определения форм группового знания

Три вида группового знания:

Определения форм группового знания

Три вида группового знания:

- ▶ $M, w_i \models E_G \varphi$ е.т.е. $\forall w' (w_i R_{E_G} w' \rightarrow M, w' \models \varphi)$

Определения форм группового знания

Три вида группового знания:

- ▶ $M, w_i \models E_G \varphi$ е.т.е. $\forall w' (w_i R_{E_G} w' \rightarrow M, w' \models \varphi)$
- ▶ $M, w_i \models D_G \varphi$ е.т.е. $\forall w' (w_i R_{D_G} w' \rightarrow M, w' \models \varphi)$

Определения форм группового знания

Три вида группового знания:

- ▶ $M, w_i \models E_G \varphi$ е.т.е. $\forall w' (w_i R_{E_G} w' \rightarrow M, w' \models \varphi)$
- ▶ $M, w_i \models D_G \varphi$ е.т.е. $\forall w' (w_i R_{D_G} w' \rightarrow M, w' \models \varphi)$
- ▶ $M, w_i \models C_G \varphi$ е.т.е. $\forall w' (w_i R_{C_G} w' \rightarrow M, w' \models \varphi)$

Некоторые свойства

Аксиомы для общего знания:

Некоторые свойства

Аксиомы для общего знания:

$$\blacktriangleright C_G(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (C_G\varphi \rightarrow C_G\psi)$$

Некоторые свойства

Аксиомы для общего знания:

- ▶ $C_G(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (C_G\varphi \rightarrow C_G\psi)$
- ▶ $C_G\varphi \rightarrow (\varphi \wedge E_G C_G\varphi)$

Некоторые свойства

Аксиомы для общего знания:

- ▶ $C_G(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (C_G\varphi \rightarrow C_G\psi)$
- ▶ $C_G\varphi \rightarrow (\varphi \wedge E_G C_G\varphi)$
- ▶ $C_G(\varphi \rightarrow E_G\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow C_G\varphi)$

Формулы и модели

Упражнение:

Построить модель для следующих формул:

1. $E_{abc}\varphi \wedge \neg K_a K_b \varphi$
2. $E_{ab}\varphi \wedge \neg E_{ab} E_{ab}\varphi$
3. $D_{ab}\varphi \wedge \neg K_a \varphi \wedge \neg K_b \varphi$
4. $C_{ab}\varphi \wedge \neg K_c \varphi$
5. $E_{ab}^2 \varphi \wedge \neg C_{ab}\varphi$

Что откуда следует?

У нас есть следующие операторы:

$$D_G, K_i, C_G, E_G, E_G^n$$

Как они связаны между собой?

Что откуда следует?

У нас есть следующие операторы:

$$D_G, K_i, C_G, E_G, E_G^n$$

Как они связаны между собой?

Иерархия форм группового знания ($i \in G$):

$$C_G\varphi \rightarrow E_G^n\varphi \rightarrow E_G^{n-1}\varphi \rightarrow \dots \rightarrow E_G\varphi \rightarrow K_i\varphi \rightarrow D_G\varphi \rightarrow \varphi$$

Литература

- ▶ Общее знание (в социальных науках) Михаил Соколов / ПостНаука
- ▶ Steven Pinker: The Elephant, the Emperor, and the Matzo Ball (про общее знание в психологии)
- ▶ SEP: Epistemic Logic
- ▶ SEP: Common Knowledge
- ▶ Mutual Knowledge
- ▶ Philpapers: Epistemic Logic
- ▶ SEP: Formal Epistemology
- ▶ Philpapers: Formal Epistemology
- ▶ SEP: Epistemic Paradoxes
- ▶ SEP: Fitch's Paradox of Knowability
- ▶ Vincent Hendricks: The trouble with bubbles

Оглавление I

1	Эпистемическая логика и формальная эпистемология	1
2	Основные идеи эпистемической логики	3
3	Синтаксис и семантика эпистемической логики	4
3.1	Синтаксис	4
3.2	Исчисление	5
3.3	Семантика Крипке	7
4	Варианты эпистемических логик	17
5	Формы группового (коллективного) знания	18
5.1	«Все знают» (распространенное знание)	19
5.2	Общее знание	21
5.3	Дистрибутивное знание	24
6	Литература	30